

THÈSES

présentées à la Faculté des Sciences de Nancy
pour obtenir le Grade de Docteur-Ingénieur

par

JEAN SERRA

Ingénieur civil des Mines

Première thèse :

**Echantillonnage et estimation locale
des phénomènes de transition miniers**

Deuxième thèse :

Propositions données par la Faculté

Soutenues publiquement le 25 octobre 1967
devant la Commission d'examen

Président : M. B. Schwartz

Examineurs : MM. Bernard
Matheron

Invité : M. Bubenicek

TOME II



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555003_0013

THÈSES

présentées à la Faculté des Sciences de Nancy
pour obtenir le Grade de Docteur-Ingénieur

par

JEAN SERRA

Ingénieur civil des Mines

Première thèse :

**Echantillonnage et estimation locale
des phénomènes de transition miniers**

Deuxième thèse :

Propositions données par la Faculté

Soutenues publiquement le 25 octobre 1967
devant la Commission d'examen

Président : M. B. Schwartz

Examineurs : MM. Bernard

Matheron

Invité : M. Bubenicek

TROISIEME PARTIE

ETUDES PRATIQUES DE GEOSTATISTIQUE

TROISIEME PARTIE

ETUDES PRATIQUES DE GEOSTATISTIQUE

GENERALITES

- 1 - Introduction
- 2 - Liste des exercices types
- 3 - Lexique des termes utilisés en géostatistique

TROISIEME PARTIE

ETUDES PRATIQUES DE GEOSTATISTIQUE

1. INTRODUCTION

C'est dans un grand souci de clarté que ces études ont cherché à être présentées. Cela se traduit sur leur plan et dans leur style.

Le plan reprend les chapftres des deux premières parties, susceptibles d'études pratiques. Par conséquent, les numéros des chapftres et des formules ne sont pas des numéros d'ordre pour cette 3ème partie, mais des chiffres de renvoi aux deux autres. (Par exemple, le chapftre V n'existera pas dans la troisième partie). De même, le plan de chaque étude pratique est mis en première page du chapftre correspondant.

Enfin, on a reproduit la liste des exercices-type ci-dessous de façon à ce que le lecteur puisse la retrouver très facilement lorsqu'il viendra chercher un éclaircissement sur la façon matérielle de traiter les problèmes géostatistiques.

L'effort de style a porté sur trois points : les termes, les formules, les applications.

La géostatistique est récente et utilise un vocabulaire qui risque parfois de dérouter. Nous avons donc placé en tête des études pratiques un lexique des termes qu'elle emploie couramment.

Les formules par contre n'ont pas été regroupées, mais au contraire intercalées avec les exercices-type, suivant l'ordre des chapitres. Nous avons préféré ne pas présenter ces formules trop sèchement ; la concision des résultats y perd, mais le lecteur y gagne des interprétations géométriques, des phrases qui répètent la formule sans son symbolisme mathématique, et surtout des commentaires sur la validité et le mode d'emploi de leurs utilisations.

Ces utilisations justement sont précisées dans les principaux cas qu'on trouvera en pratique, dans quelques exemples-type.

2. LISTE DES EXERCICES-TYPE

Nous regroupons ici la liste des exercices-type, la plupart donnent un exemple d'une manipulation (construction d'un variogramme, ajustement à un modèle) que tout utilisateur de la géostatistique devra nécessairement accomplir.

Ils ne traitent pas tous les problèmes possibles de loin ; mais nous avons préféré établir une série d'exemples , simple et courte, de façon à ce qu'on puisse les lire avec la plus grande attention.

- Exercice-type A (Chapitre II)

Etude de la variance d'extension d'un ou de deux sondages à un tronçon de galerie

- Exercice-type B (Chapitre III)

Construction d'un variogramme expérimental

- Exercice-type C (Chapitre IV)

Ajustement d'un variogramme expérimental à un modèle théorique

- Exercice-type D (Chapitre VI)

Exemple d'application des règles d'échantillonnage

- Exercice type E (Chapitre VII)

Exemple de lecture des abaques de krigeage régulier

- Exercice F (Chapitre VII)
Exemple d'utilisation du krigeage élémentaire

- Exercice type G (Chapitre VIII)
Détermination de la variance d'estimation de la surface de la couche grise (gisement de fer lorrain)

- Exercice type H (Chapitre VIII)
Optimisation d'une maille de reconnaissance

- Exercice-type I (chapitre IX)
Exemple d'estimation par mailles régulières

- Exercice-type J (Chapitre IX)
Optimisation de plusieurs modes de reconnaissance simultanés

- Exercice-type K (Chapitre X)
Etude de la poursuite ou de l'arrêt d'une campagne de recherches

- Exercice-type L (Chapitre X)
Etude d'un optimum de reconnaissance par rapport à l'exploitation correspondante.

3. LEVXIQUE DES TERMES USUELS EN GEOSTATISTIQUE

Aléatoire

Fonction aléatoire (encore appelée, dans l'espace à une dimension, processus stochastique).

Une définition axiomatique rigoureuse n'est pas à sa place ici. Intuitivement, on peut considérer une fonction aléatoire comme une variable aléatoire à une infinité de composantes. A une dimension, par exemple, en tout point x de l'axe Ox , la fonction prend une valeur $f(x)$, valeur liée à celle prise en tous les autres points par la fonction au cours de la même réalisation.

(voir intrinsèque)

Variable aléatoire (vu sous l'angle régionalisé)

variable régionalisée intrinsèque de $\gamma(h)$ défini par l'échelon unité

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= C Y(h) & Y(h) &= 0 \text{ si } h = 0 \\ & & Y(h) &= 1 \text{ si } h > 0\end{aligned}$$

maille aléatoire ou aléatoire stratifiée : voir "maille"

Anisotropies

Déformations du covariogramme ou de la fonction intrinsèque en fonction de la direction de vecteur h .

run, zonalité : le $\gamma(h)$ ne dépend que de certaines composantes du vecteur h

anisotropie géométrique : la régionalisation est isotrope à une ou deux affinités géométriques près.

Amplitude

Valeur C de l'ordonnée du palier du $\gamma(h)$ d'un phénomène de transition. C'est la variance à priori de la variable régionalisée ponctuelle.

Champ

Voir "régionalisation"

Corégionalisation

En chaque point x de l'espace minéralisé peuvent être définies plusieurs variables régionalisées telles que $f_i(x)$ et $f_j(x)$. On appelle corégionalisation leur structure commune, et on l'étudie, en schéma intrinsèque à l'aide du covariogramme rectangle :

$$\frac{1}{2} E \left[f_i(x+h) - f_i(x) \right] \cdot \left[f_j(x+h) - f_j(x) \right]$$

qui généralise exactement la notion de variogramme

Coupure (teneur de coupure)

A tout projet d'exploitation d'un gisement correspond un tonnage T et une teneur moyenne m . On appelle teneur de coupure la variable x telle que :

$$x = \frac{d(m T)}{dT}$$

Covariance

La covariance de v et v' dans le champ V généralise la notion de variance de v dans V , elle a pour expression :

$$\frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V \gamma(x - x') dx' - \frac{1}{v \cdot v'} \int_{v'} dx' \int_v \gamma(x - x') dx$$

où la seconde intégrale représente la valeur moyenne du $\gamma(h)$ quand une extrémité du vecteur h décrit v' et l'autre v indépendamment de la première. Dans la première intégrale, les domaines d'intégrations sont superposés et égaux à V .

Covariance à priori de v et v'

Même expression que précédemment quand V est infini. N'est définissable que si $\gamma(h)$ est borné, c'est-à-dire uniquement pour les phénomènes de transition.

Dans ces deux définitions v et v' peuvent être réduits à des points ou groupe de points.

Dérive

Enrichissement ou appauvrissement systématique d'une variable régionalisée dans une direction donnée. Les schémas intrinsèques sont compatibles avec des dérives linéaires (dans l'étude des séries chronologiques l'équivalent de la dérive est la tendance).

Distribution

Au sens statistique, la distribution est le modèle théorique d'un histogramme de données numériques (exemple : un histogramme de teneurs est parfois ajustable à une distribution lognormale).

Au sens de L. SCHWARTZ "Distribution" est un concept qui généralise la notion de fonction, englobant en particulier les pseudo fonctions trop discontinues pour être définies analytiquement (Ex : "fonction d'heaviside"). Les régionalisations présentant des effets de pépité sont des distributions.

Echelle

Ordre de grandeur des caractéristiques en distance d'un phénomène de transition (portées, tailles des panneaux).

Ecran (effet d'écran)

Terminologie relative au krigeage. On dit qu'il y a effet d'écran quand une première auréole d'échantillons entourant de façon plus ou moins lâche le panneau P à kriger rend son estimation indépendante des reconnaissances extérieures (comme en électricité les écrans électrostatiques).

Les effets de pépité lèvent les écrans.

Effet rectangulaire

Il y a effet rectangulaire si les calculs de montée droite d'ordre n se décomposent en le produit de n calculs de montée d'ordre 1.

L'effet rectangulaire est une propriété caractéristique des schémas intrinsèques de type Gaussien.

Erreur

Différence entre la valeur vraie, inconnue à priori, d'un paramètre et celle qu'on estime. On distingue les erreurs systématiques et aléatoires.

On appelle parfois "erreur quadratique" le carré de la différence précédente. Dans ces conditions, les variances d'extension et le $\chi^2(h)$ peuvent être interprétés comme les valeurs probables d'erreurs quadratiques.

Estimateur

Soit à reconnaître le panneau P à partir des n reconnaissances (sondages, mesures au fond ...) $R_1, R_2 \dots R_n$. On appelle estimateur de P toute moyenne pondérée de $R_1 \dots R_n$, par les coefficients $a_1 \dots a_n$ de somme égale à l'unité. Si les travaux de reconnaissance sont continus, les coefficients $a_1 \dots a_n$ sont remplacés par la fonction de pondération ou de prélèvement (cf. ce mot).

Géologie mathématique

Au sens large, application des méthodes mathématiques à la géologie. Ici, application des méthodes d'étude des variables régionalisées relevant de l'analyse harmonique et du calcul des probabilités (fonctions aléatoires) à la géologie sédimentaire.

Géométrie

- problème géométrique : estimation de la frontière d'un gisement.
- variable géométrique : ne prend que des valeurs du type "tout ou rien (1 ou 0) - Permet de caractériser un volume V ; on pose alors :

$$k(x) = 1 \quad \text{si } x \in V$$

$$k(x) = 0 \quad \text{si } x \notin V$$

Géostatistique

Application de la théorie des variables régionalisées aux problèmes de reconnaissance, d'estimation et d'économie minière.

- Géostatistique "pure" : voir "Géologie mathématique"

Gisement

Opération technologique de partition d'une régionalisation.

Indépendance

Dans les phénomènes de transition intrinsèques, deux variables sont indépendantes si elles ont une covariance à priori nulle.

Intrinsèque :

- Hypothèse intrinsèque : recours à la théorie des fonctions aléatoires pour étudier une régionalisation. Elle repose sur l'idée de ne considérer que des accroissements de la variable, définis sur le même support (exemple : variogramme) ou sur des supports différents (exemple : variance d'extension). Les accroissements considérés sont supposés stationnaires, c'est-à-dire homogènes dans l'espace, comme si le phénomène régionalisé s'était reproduit à petite échelle plusieurs fois, bien qu'il soit dans son ensemble unique.

En fait la théorie des fonctions aléatoires n'intervient pas tant par ses hypothèses probabilistes que parce qu'elle permet de penser commodément un changement d'échelle.

- Fonction intrinsèque : demi-variance des accroissements de la fonction aléatoire.

notation
$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E \left[f(x+h) - f(x) \right]^2$$

où x et h sont des vecteurs à n dimensions.

Krige (formule de Krige)

Le panneau s de teneur x se déplace dans S de teneur y

le panneau S se déplace à son tour dans $\mathcal{S}$ de teneur z . On a :

$$\sigma_{s/S}^2 + \sigma_{S/\mathcal{S}}^2 = \sigma_{s/\mathcal{S}}^2$$

Cette relation, dite formule de Krige, n'est définissable que dans quelques cas particuliers. En général, elle sert au contraire de définition à la variance de s dans S .

Krigeage

Détermination des coefficients de pondération à associer aux divers travaux de reconnaissance pour estimer au mieux un panneau donné. On distingue le krigeage régulier, où les panneaux occupent des positions préférentielles vis à vis de la reconnaissance, et le krigeage aléatoire, correspondant aux mailles aléatoires stratifiées ou régulières à implantation flottante.

Lasky (loi de Lasky)

Relation entre les tonnages et teneurs des différents projets d'exploitations optimaux du gisement du type :

$$m = \alpha - \beta \text{ Log } T \quad (T = \text{tonnage})$$

$m = \text{teneur moyenne}$

Maille

Distance ou surface unitaire du réseau de sondages.

On distingue trois types de mailles :

a) maille régulière : les sondages sont implantés aux noeuds d'un réseau polygonal régulier.

b) maille aléatoire stratifiée : un sondage est implanté de façon aléatoire dans chaque polygone du réseau.

c) maille aléatoire pure : les sondages sont tous implantés de façon aléatoire indépendamment les uns des autres (suivant un processus de poisson à n dimensions).

On distingue trois types d'implantation du réseau de sondages par rapport au champ.

a) réseau à implantation préférentielle : coïncide avec le champ, qui est lui-même un multiple de la maille.

b) réseau à implantation flottante : les limites du champ étant inconnues à priori, le réseau de sondages est implanté de façon quelconque par rapport à lui.

c) maille adaptée : l'anisotropie de la maille rectifie celle du champ.

Montée

Soit une régionalisation intrinsèque isotrope à n dimension admettant $\chi(h)$ pour fonction intrinsèque de la variable ponctuelle. On appelle montée droite sous puissance constante (montée d'ordre 1), la régionalisation à $n - 1$ dimensions définie dans un hyperplan perpendiculaire au vecteur ℓ . La variable montée en chaque point de l'hyperplan vaut la valeur moyenne de la variable ponctuelle le long du segment ℓ qui lui correspond.

Par exemple, dans les gisements stratifiés, le passage de la régionalisation ponctuelle à celle définie par des saignées allant du toit au mur est une montée d'ordre 1.

Par itération du procédé on définit des montées d'ordre 2 (rectangles), d'ordre 3 (parallélépipèdes rectangles) etc...

Palier

Le palier de la fonction intrinsèque d'un phénomène de transition est l'horizontale vers laquelle $\gamma(h)$ tend, soit asymptotiquement, soit en l'atteignant au bout d'une distance égale à la portée.

Pépité (effet de pépité)

Discontinuité du $\gamma(h)$ à l'origine, traduisant l'existence de transitions d'échelle inférieure. Si ces transitions ont pour amplitude totale C_0 , et le phénomène étudié a pour amplitude C , on caractérise l'effet de pépité par le rapport $\xi = C_0/C$.

Phénomène de transition

Régionalisations appartenant au type transitif, soit au type intrinsèque. Dans ce dernier cas, le $\gamma(h)$ tend nécessairement vers une limite finie quand $h \rightarrow \infty$

Fréquemment, la limite du $\gamma(h)$ est atteinte au bout d'une distance finie appelée la portée.

Exemple : schéma de Matheron.

Polissage (facteur de polissage)

Régularisation du début du variogramme (ou affaiblissement de l'effet de pépite le cas échéant) quand la taille du support croît. L'étude du facteur de polissage intervient principalement dans le problème de l'échantillonnage des régionalisations.

Portée

La portée est l'un des paramètres caractéristiques des fonctions intrinsèques des phénomènes de transition. Pour une direction donnée, elle est l'abscisse au delà de laquelle le $\gamma(h)$ peut être considéré comme constant.

Il arrive que le $\gamma(h)$ atteigne effectivement son palier à une distance finie, la définition de la portée est alors rigoureuse.

Dans les applications pratiques, on choisit parfois pour portée l'abscisse de l'intersection de la tangente à l'origine du $\gamma(h)$ avec son palier.

Prélèvement

(fonction de prélèvement ou de pondération)

L'échantillon possède le volume v de variable géométrique $k(x)$.

La fonction de prélèvement définit le poids $p(x)$ attribué à chaque point de l'échantillon.

$$\text{On a : } \int_v p(x) dx = 1$$

Dans le cas particulier usuel où tous les points ont la même importance, il vient :

$$p(x) = \frac{1}{v} \int k(x)$$

Processus stochastique

Fonction aléatoire à une dimension.

Régionalisation

Domaine d'observation d'une variable régionalisée, elle est définie dans un champ à l'aide d'un support.

Exemple : Dans la couche grise du gisement lorrain (champ), on peut distinguer la régionalisation des sondages de celle des panneaux d'un hectare (supports).

Reconnaissances

Sondages, traçages, prélèvements au fond, anciens travaux, affleurements, dont les caractéristiques, connues, servent à estimer les zones inconnues.

Réserves

Tonnage minéral, tonnage métal et teneur moyenne associés à chaque partition découpant un gisement sur la régionalisation.

Schémas intrinsèques

Modèle mathématique pour la fonction $\gamma(h)$.

Exemples de schémas isotropes (qui ne dépendent que du module r du vecteur h)

1) Schémas de Wisjien : $\gamma(r) = 3 \propto \text{Log } r$
et par extension : $\gamma(r) = 3 \propto \text{Log } (r + a)$

2) Schémas de Matheron : $\gamma(r) = C \left[1 - \frac{1}{V_n} K_n(r) \right]$

où V_n est le volume de l'hypersphère à n dimensions et $K_n(r)$ son covariogramme géométrique.

$$\text{si } n = 1 \quad \gamma(r) = C \frac{r}{a} \quad \text{pour } r < a$$

$$\gamma(r) = C \quad \text{pour } r \geq a$$

$$\text{si } n = 3 \quad \gamma(r) = C \left[\frac{3}{2} \frac{r}{a} - \frac{1}{2} \frac{r^3}{a^3} \right] \quad \text{pour } r < a$$

$$\gamma(r) = C \quad \text{pour } r \geq a$$

en pratique, on appellera schéma de Matheron le schéma à trois dimensions.

3) Schémas de Formery : définis à partir des fonctions de Kelvin $r^{-\lambda} K_{-\lambda}(r)$.

En pratique, on appellera schéma de Formery la fonction (correspondant à $\lambda = \frac{1}{2}$) :

$$\gamma(r) = C \left[1 - e^{-r/a} \right]$$

4) Schéma Gaussien :

$$\gamma(r) = C \left[1 - e^{-r^2/2a^2} \right]$$

5) Schéma linéaire :

$$\gamma(r) = p r$$

Support d'un échantillon

Variable géométrique $h(x)$ associée au volume v du prélèvement.

Système de Matheron

Système d'équations linéaires permettant d'exprimer les coefficients a_j de krigeage en fonction des covariances de la configuration où ils sont implantés :

$$\sum_j a_j R_{ij} = N_i \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} R_{ij} &= \sigma_{ij} - \sigma_{in} - \sigma_{jn} + \sigma_{nn}^2 \\ N_i &= \sigma_{zi} - \sigma_{zn} + \sigma_{nn} - \sigma_{in} \end{aligned}$$

Teneur

Au sens des chimistes, la teneur d'un échantillon en un métal donné est le rapport du poids du métal de l'échantillon, sur le poids du minerai sec (teneur pondérale).

Dans les calculs de tonnages intervient plutôt la teneur volumique ou poids de métal par unité de volume de minerai sec (pour le minerai extrait), ou compte tenu de sa quantité d'eau (pour le minerai en place).

Transitif

(Représentations transitives) Méthodes globales de représentation et d'estimation de régionalisations à support borné. Elles relèvent, sur le plan mathématique, de l'analyse harmonique.

(Plus générales que les schémas intrinsèques, elles sont par le fait même moins puissantes).

Tout ou rien (fonction aléatoire en tout ou rien)

Fonction aléatoire décrivant une variable géométrique.

Trou (effet de trou)

$\gamma(h)$ passant par un maximum.

Variable régionalisée

Fonction de l'espace ou du temps, qui varie avec une certaine apparence de continuité sans qu'il soit possible de la représenter par une fonction mathématique extrapolable, en général.

Variance

- Variance d'extension (définie seulement en schéma intrinsèque)

Le panneau P de teneur Z et ses reconnaissances R de teneur Y se déplacent ensemble à travers toute la régionalisation.

On appelle variance d'extension, la variance de leur différence.

- Variance ponctuelle à priori - Variance d'un point dans un champ infini de toutes parts. Dans les phénomènes de transition, la variance ponctuelle à priori existe toujours et a pour valeur l'amplitude C (définie uniquement en schéma intrinsèque).

- Variance d'estimation - Variance de l'erreur commise en estimant un gisement, ou une portion de celui-ci, à partir de sa reconnaissance. En schéma intrinsèque, la variance d'estimation se calcule à partir de la variance d'extension. En représentations transitives, ces variances se calculent en supposant la reconnaissance flottante par rapport au champ.

- Variance de v dans un champ V - (cf. Krige, formule de Krige).

D'après la formule de Krige, la variance du volume v dans le volume V a pour expression :

$$\frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V \gamma(x - x') dx' - \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v \gamma(x - x') dx'$$

Chacune de ces intégrales sextuples représente la valeur moyenne de la fonction intrinsèque $\gamma(h)$ quand l'origine et l'extrémité du vecteur h parcourent indépendamment l'une de l'autre le volume V (ou le volume v'). (Définie uniquement en schéma intrinsèque).

Dans toutes ces définitions, les volumes peuvent être réduits à des points ou des groupes de points.

Variogramme

Variance des accroissements d'une régionalisation intrinsèque. Par définition, le variogramme est le double de la fonction intrinsèque. Il constitue le paramètre d'étude expérimentale des phénomènes intrinsèques.

ETUDES PRATIQUES

CHAPITRE II

RESUME DE LA THEORIE INTRINSEQUE DES VARIABLES REGIONALISEES

- 1 - Formulaire de base de géostatistique
- 2 - Formulaire des diverses variances des segments, rectangles et parallélépipèdes
- 3 - Exercice-type A. Etude de la variance d'extension d'un ou de deux sondages à un tronçon de galerie.

CHAPITRE II

RESUME DE LA THEORIE INTRINSEQUE DES VARIABLES REGIONALISEES

1. FORMULAIRE DE BASE DE LA GEOSTATISTIQUE

1.1. Formule de KRIGE

Le panneau s est mobile dans le panneau S , lui-même mobile dans le champ $\mathcal{Y}$.

La variance $\sigma_{s/S}^2$ est la différence des variances $\sigma_{s/\mathcal{Y}}^2$ et $\sigma_{S/\mathcal{Y}}^2$ de s dans $\mathcal{Y}$ et de S dans $\mathcal{Y}$.

$$(II, 3) \quad \sigma_{s/S}^2 = \sigma_{s/\mathcal{Y}}^2 - \sigma_{S/\mathcal{Y}}^2$$

1.2. Fonction intrinsèque $\gamma(h)$

$$(II, 4) \quad \gamma(h) = \frac{1}{2} E \left[f(x+h) - f(x) \right]^2$$

$\gamma(h)$ est la demi-variance des accroissements de la variable régionalisée suivant un vecteur h , dans un champ infini.

1.3. Variance du volume v dans V (le volume v possède une, deux ou trois dimensions) :

$$(II, 5) \quad \sigma_{v/V}^2 = \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x - x') dx dx' - \frac{1}{v^2} \int_v \int_v \gamma(x - x') dx dx'$$

1.4. Covariance des volumes v et v' dans V

$$(II, 7) \quad \sigma_{v, v'/V} = \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x - x') dx dx' - \frac{1}{v \cdot v'} \int_v \int_{v'} \gamma(x - x') dx dx'$$

1.5. Variance d'extension du volume V' au volume V

$$(II, 8) \quad \sigma_E^2 = -\frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x - x') dx \cdot dx' - \frac{1}{V'^2} \int_{V'} \int_{V'} \gamma(x - x') dx \cdot dx' + \frac{2}{V \cdot V'} \int_V \int_{V'} \gamma(x - x') dx dx'$$

1.6. Variance d'extension du volume V' au volume V (V' est réduit maintenant au groupe des N sondages ponctuels implantés en x : (i = 1, ... N)

$$(II, 9) \quad \sigma_E^2 = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{i=N} \gamma(x - x_i) dx - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x - x') dx dx' - \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \gamma(x_i - x_j)$$

1.7. Formule de la montée droite isotrope

$\gamma_n(x)$ est la fonction intrinsèque de la variable ponctuelle.

$\gamma_{n-1}(r)$ est celle de la variable définie dans le même champ, mais de support le segment ℓ perpendiculaire au vecteur r .

$$(II, 13) \quad \gamma_{n-1}(r) = \frac{2}{\ell^2} \int_0^\ell (\ell - x) \gamma_n(\sqrt{x^2 + r^2}) dx - \frac{2}{\ell^2} \int_0^\ell (\ell - x) \cdot \gamma_n(x) dx$$

1.8. Fonctions auxiliaires F et X (à une dimension)

$X(h)$ est la moyenne du $\gamma(x)$ lorsque x représente la distance entre un point courant d'un segment de longueur h et l'une de ses extrémités fixes :

$$(II, 14) \quad X(h) = \frac{1}{h} \int_0^h \gamma(x) dx$$

$F(h)$ représente la valeur moyenne de $\gamma(x)$ lorsque x est la distance de deux points courants, décrivant indépendamment le segment de longueur h .

$$(II, 14) \quad \begin{aligned} F(h) &= \frac{1}{h^2} \int_0^h \int_0^h \gamma(x-y) dx dy = \frac{2}{h^2} \int_0^h x X(x) dx \\ &= \frac{2}{h^2} \int_0^h (h-x) \gamma(x) dx \end{aligned}$$

1.9. Fonction F pour un parallélépipède rectangle et un volume quelconque

La valeur moyenne du $\gamma(h)$ quand les deux extrémités du vecteur h parcourent indépendamment l'une de l'autre tout le volume du parallélépipède a, b, c

$$(II, 15) \quad F(a, b, c) = \frac{8}{a^2 b^2 c^2} \int_0^a \int_0^b \int_0^c (a-x)(b-y)(c-z) \gamma \left[\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right] dx dy dz$$

Plus généralement, si V est un volume quelconque :

$$(II, 6) \quad F(V) = \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x - x') dx dx'$$

On voit donc que la variance de v dans V s'écrit :

$$\sigma_{v/V}^2 = F(V) - F(v)$$

En schéma de transition d'amplitude C , il vient par définition de l'amplitude :

$$F(\infty) = C$$

(où le signe ∞ représente une droite, un plan ou tout l'espace).

2. FORMULAIRE DES DIVERSES VARIANCES DES SEGMENTS, RECTANGLES, ET PARALLELEPIPEDES

2.1. Formules des segments

Moyenne de $\gamma(x)$ entre un segment et une de ses extrémités

$$X(a) = \frac{1}{2a} \frac{dF(a)}{da}$$

On en déduit les variances usuelles.

2.2. Variance d'un segment ℓ dans un champ L

$$(II, 16) \quad \sigma^2(\ell/L) = F(L) - F(\ell)$$

en particulier, si $\ell = 0$

$$(II, 17) \quad \sigma^2(0/L) = F(L)$$

2.3. Covariance dans un champ L d'un segment ℓ avec une de ses extrémités

$$(II, 18) \quad \sigma(0, \ell/L) = F(L) - X(\ell)$$

2.4. Variance d'extension d'un échantillon de longueur ℓ , petite, implanté au centre de L .

$$\sigma_E^2 = 2 X\left(\frac{L}{2}\right) - F(L) - F(\ell)$$



2.5. Variance d'extension de deux échantillons ℓ , placés aux extrémités de L .

II, 20)

$$\sigma_E^2 = 2 X(L) - F(L) - F(\ell)$$



2.6. Formules des rectangles

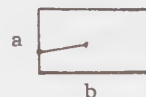
moyenne de $\gamma(r)$ dans le rectangle $ab = F(a, b)$



moyenne de $\gamma(r)$ entre le rectangle ab et son côté a :

II, 21)

$$X(b, a) = \frac{1}{2b} \frac{\partial}{\partial b} b^2 F(a, b)$$



moyenne de $\gamma(r)$ entre le rectangle et son côté b

$$X(a, b) = \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial a} F(a, b)$$

moyenne de $\gamma(r)$ entre les deux côtés distants de b du rectangle

II, 22)

$$\gamma(b, a) = \frac{\partial}{\partial b} b X(b, a) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial b^2} b^2 F(a, b)$$

moyenne de $\gamma(r)$ entre deux côtés perpendiculaires du rectangle :

$$H(a, b) = \frac{1}{2a} \int_0^a \frac{X(b, a)}{\int_0^a} = \frac{1}{4ab} \int_0^a \int_0^b \frac{a^2 b^2 F(a, b)}{\int_0^a \int_0^b}$$

(c'est aussi la moyenne de $\gamma(r)$ entre le rectangle et chacun de ses sommets).

On en déduit les variances et covariances usuelles :

2.7. Variance d'un petit rectangle dans un grand rectangle

D'après la formule de Krige :

$$\sigma^2(s/S) = F(\alpha, \beta) - F(a, b)$$

En particulier :



2.8. Variance d'un point dans un rectangle

$$(II, 24) \quad \sigma^2(o/s) = F(a, b)$$

en schéma de transition de variance ponctuelle à priori C , variance à priori d'un rectangle dans la régionalisation, ou plus brièvement variance du rectangle, il vient :

$$(II, 25) \quad \sigma^2(s/\infty) = C - F(a, b)$$

2.9. Variance d'un élément linéaire de longueur a dans le rectangle ab

(II, 26)
$$\sigma^2(a/ab) = F(a, b) - F(0, b)$$

2.10. Variance d'extension du traçage médiane de longueur a dans le rectangle ab

(II, 27)
$$\sigma_E^2 = 2X\left(\frac{b}{2}, a\right) - F(b, a) - F(0, a)$$



2.11. Variance d'extension de deux côtés parallèles a dans le rectangle ab

(II, 28)
$$\sigma_E^2 = 2X(b, a) - F(b, a) - \frac{1}{2}Y(b, a) - \frac{1}{2}F(0, a)$$



2.12. Covariance entre le rectangle ab et son côté a dans le rectangle $\alpha\beta$

(II, 29)
$$\sigma(a, ab/\alpha\beta) = F(\alpha, \beta) - X(b, a)$$

2.13. Schéma de transition, covariance de ab avec son côté a :

(II, 30)
$$\sigma(a, ab) = C - X(b, a)$$

2.14. Covariance entre le rectangle ab et un de ses sommets, dans le rectangle $\alpha\beta$

$$\sigma(0, ab/\alpha\beta) = F(\alpha, \beta) - H(a, b)$$

2. 15. Schéma de transition, covariance de ab avec un de ses sommets :

$$(II, 31) \quad \bar{G}(o, ab) = C - H(a, b)$$

2. 16. Variance d'extension du sondage implanté au centre du panneau ab

$$(II, 32) \quad \bar{G}_E^2 = 2 H\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) - F(a, b)$$

2. 17. Formules des parallélépipèdes rectangles

moyenne de $\gamma(r)$ dans le parallélépipède abc = $F(a, b, c)$

moyenne de $\gamma(r)$ entre le parallélépipède et une face bc = $X(a; bc)$

$$(II, 33) \quad X(a; bc) = \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial a} a^2 F(a, b, c)$$

moyenne de $\gamma(r)$ entre deux faces bc distantes de a = $\gamma(a; bc)$

$$(II, 34) \quad \gamma(a; bc) = \frac{\partial}{\partial a} a X(a; bc)$$

moyenne de $\gamma(r)$ entre deux faces perpendiculaires à bc (contenant a)

$$(II, 35) \quad H(bc; a) = \frac{1}{4bc} \frac{\partial^2 b^2 c^2 F(abc)}{\partial b \partial c} = \frac{1}{2b} \frac{b^2 X(c; ba)}{b}$$

(c'est aussi la moyenne du $\gamma(r)$ entre le parallélépipède et chaque arête perpendiculaire à la face bc).

2.18. Variance d'un petit parallélépipède abc dans un grand parallélépipède

$$\sigma^2 (abc / \alpha \beta \gamma) = F(\alpha \beta \gamma) - F(abc)$$

En particulier :

2.19. Variance d'un point dans le parallélépipède abc

(II, 36)

$$\sigma^2 (o/abc) = F(abc)$$

2.20. Variance du parallélépipède abc dans la régionalisation
(schéma de transition)

(II, 37)

$$\sigma^2 (abc) = \sigma^2 (abc / \infty) = C - F(abc)$$

2.21. Variance d'extension de la section médiane bc dans abc

(II, 38)

$$\sigma_E^2 = 2 X\left(\frac{a}{2}, bc\right) - F(a, b, c) - F(o, b, c)$$

2.22. Covariance entre abc et sa face bc (schéma de transition,
champ infini)

(II, 39)

$$\sigma(bc, abc) = C - X(a, b, c)$$

2.23. Covariance de abc avec une ses arêtes perpendiculaires à bc

$$(II, 40) \quad \bar{V}(a/abc) = C - H(bc, a)$$

2.24. Variance d'extension du sondage implanté au centre de bc et traversant abc perpendiculairement à bc

$$(II, 41) \quad \sigma_E^2 = 2 H \left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}, a \right) - F(b, c, a) - F(o, o, a)$$

3. EXERCICE-TYPE A

Variance d'extension élémentaire à une dimension

Soit un tronçon de galerie de longueur ℓ . Supposons le d'abord reconnu par un échantillon unique, pratiquement ponctuel, implanté en son centre. La teneur de l'échantillon est Y , celle du tronçon de galerie Z . Quelle est la variance de l'erreur que l'on commet en étendant au tronçon de galerie la teneur Y ?

Par définition, cette variance est la variance d'extension de Y à Z ; son expression, compte tenu de (II, 9), s'écrit :

$$\text{II, 10)} \quad D^2 (Y - Z) = \frac{4}{\ell} \int_0^{\ell/2} \gamma(x) dx - \frac{2}{\ell^2} \int_0^\ell dx \int_0^x \gamma(y) dy$$

Prenons pour demi-variogramme $\gamma(x) = x^\alpha$, il vient :

$$D^2 (Y - Z) = \frac{2}{\alpha + 1} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^\alpha - \frac{1}{\alpha + 2} \right] \ell^\alpha$$

Donnons à α les valeurs $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$, qui correspondent aux fonctions intrinsèques représentées par la figure (II, 3).



Figure II-3: Types de fonctions intrinsèques.

Pour ces cinq fonctions intrinsèques, (II, 10) prend la valeur :

(II, 11)

α	$D^2 (Y - Z)$	α	$D^2 (Y - Z)$
0	1	3/2	0,054 $\ell^{3/2}$
1/2	0,409 $\cdot \ell^{1/2}$	2	0
1	0,167 $\cdot \ell$		

Le cas $\alpha = 0$ correspond à l'effet de pépite pur. La véritable expression de la fonction intrinsèque est en fait :

$$\gamma(0) = 0$$

$$\gamma(\ell) = 1 \quad |\ell| > 0$$

La régionalisation est constituée de variables aléatoires indépendantes. Les trois autres cas $\alpha = 1/2$, 1 et 3/2 correspondent à une gradation depuis l'aléatoire pur jusqu'à une variable régionalisée fonctionnelle, puisque la tangente à l'origine du $\gamma(\ell)$ est verticale, puis oblique, puis horizontale. La variance d'extension croît comme $\gamma(\ell)$, mais avec un coefficient de proportionnalité variant des 2/3 au 1/20 au fur et à mesure que la régionalisation est plus continue.

Le cas $\alpha = 2$ débouche sur une variance d'extension nulle, ce qui signifierait que la teneur de l'échantillon central est exactement la teneur du panneau. En réalité, il n'en est rien, et ce résultat aberrant provient du choix de $\gamma(\ell)$ qui pour $\alpha = 2$ ne vérifie plus la condition d'être du type positif conditionnel. On démontre en effet que les fonctions en ℓ^α ne peuvent jouer le rôle de fonction intrinsèque que si

$$0 < \alpha < 2$$

On voit donc l'importance pratique de cette condition : il faudra ajuster les variogrammes expérimentaux à des modèles qui reflètent la réalité expérimentale, certes, mais tout en étant logiquement cohérents.

Revenons à notre tronçon de galerie de longueur ℓ et supposons le reconnu cette fois-ci par deux échantillons placés aux extrémités du segment. On prend évidemment la fonction de pondération $1/2$ pour chaque échantillon. La variance d'extension s'écrit alors :

$$\begin{aligned} D^2 \left(\frac{Y_1 + Y_2}{2} - Z \right) &= D^2 \left(\frac{Y_1 + Y_2}{2} \right) + D^2(Z) - 2 E \left[Z \left(\frac{Y_1 + Y_2}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} D^2(Y_1) + D^2(Z) + \frac{1}{2} \cdot E(Y_1 + Y_2) - 2 E(Z \cdot Y_1) \\ D^2 \left(\frac{Y_1 + Y_2}{2} - Z \right) &= \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \gamma(x) dx - \frac{2}{\ell^2} \int_0^\ell dx \int_0^x \gamma(y) dx - \frac{1}{2} \gamma(\ell) \end{aligned}$$

Soit en reprenant $\gamma(\ell) = \ell^\alpha$

$$D^2 \left(\frac{Y_1 + Y_2}{2} - Z \right) = \left(\frac{2}{\alpha + 1} - \frac{2}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)} - \frac{1}{2} \right) \ell^\alpha$$

et numériquement :

α	$D^2 \left(\frac{Y_1 + Y_2}{2} - Z \right)$	α	$D^2 \left(\frac{Y_1 + Y_2}{2} - Z \right)$
0	$\frac{1}{2}$	3/2	$0,071 \ell^{3/2}$
1/2	$0,300 \ell^{1/2}$	2	0
1	$0,167 \ell$		

(II, 12)

La comparaison des tableaux (II, 11) et (II, 12) est instructive.

Dans le cas aléatoire pur, on retrouve la loi de variance proportionnelle à la taille de l'échantillon, ici 1 puis 2. Seulement dans le second cas, il y a deux échantillons, mais ils sont moins bien placés, et au fur et à mesure que la régionalisation est plus continue, l'emplacement de l'échantillonnage devient prépondérant vis à vis du nombre des échantillons. L'équilibre a lieu quand la fonction intrinsèque a une tangente oblique à l'origine ($\alpha = 1$).

Dans ce cas, il est strictement équivalent d'estimer le segment à partir d'un échantillon central ou de deux échantillons extrêmes. Par contre, des variables continues telles que des puissances ($1 < \alpha < 2$) seront avantageusement estimées à partir d'un échantillon central : l'aspect régionalisé l'emporte sur l'aspect aléatoire.

Supposons maintenant que l'échantillonnage du tronçon ℓ soit aléatoire, c'est-à-dire que l'échantillon anciennement central soit implanté cette fois dans ℓ suivant la loi de probabilité uniforme ; et que les deux échantillons extrêmes soient remplacés par 2 échantillons, mais indépendamment l'un de l'autre, toujours suivant la loi uniforme.

La première variance d'extension devient égale à la variance d'un point dans ℓ , et la seconde devient égale à la moitié de la variance d'un point dans ℓ (prélèvements indépendants dans ℓ).

Cette variance a pour expression (cas d'un seul échantillon) :

$$\sigma^2(o/\ell) = \frac{2}{\ell^2} \int_0^\ell dx \int_0^y \gamma(y) dy = \frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \ell^\alpha$$

Il vient numériquement :

α	$\sigma^2 (o/\ell)$	α	$\sigma^2 (o/\ell)$
0	1	3/2	0,229 $\ell^{3/2}$
1/2	0,534 $\ell^{1/2}$	2	0,167 ℓ^2
1	0,333 ℓ		

Comme il se doit, cette variance est toujours plus grande que la variance d'extension correspondante.

ETUDES PRATIQUES

CHAPITRE III

PRESENTATION GEOLOGIQUE DU GISEMENT DE FER LORRAIN

- EXERCICE-TYPE B. Construction d'un variogramme expérimental

CHAPITRE III

PRESENTATION GEOLOGIQUE DU GISEMENT DE FER LORRAIN

Le chapitre III, de nature géologique, ne comporte par par lui-même de calculs ni de formules utiles pour les études pratiques géostatistiques. Non pas certes qu'il soit dénué d'incidences pratiques. Au contraire, il faut bien posséder la géologie d'un gisement pour pouvoir ensuite se lancer dans des études géostatistiques. Mais, par essence, cette géologie ne se tabule pas.

Nous ne donnerons donc qu'un seul exercice-type, mais fondamental : la construction d'un variogramme expérimental, à partir des prélèvements géologiques ou miniers.

EXERCICE-TYPE B

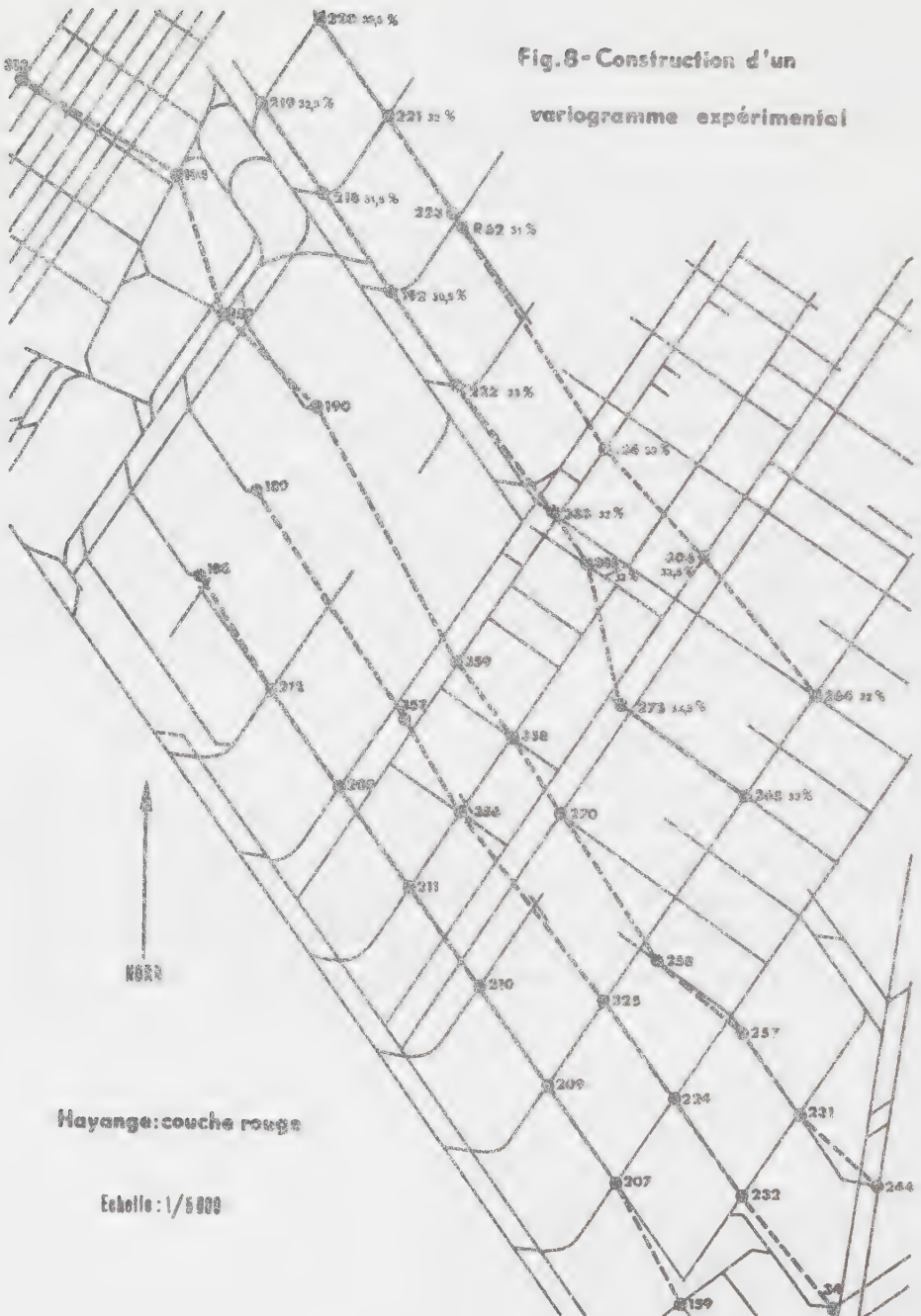
Construction d'un variogramme expérimental

Choisissons un minéral simple, oxydé et sans argile, et considérons le comme le ferait un géomètre minier. La couche est redressée de ses failles (on évitera de faire passer le champ de la régionalisation dans leur voisinage à cause de leur action perturbatrice locale sur les teneurs) et la teneur est prise en valeur moyenne du toit au mur : elle se présente donc comme répartie sur un plan, en chaque point duquel sont définies les variables chimiques usuelles, plus la puissance. Cette opération de réduction de 3 à 2 des dimensions de la régionalisation est exactement ce que nous avons défini comme la montée au chapitre précédent, mais comme nous savons que le volume minéralisé de la portion de séquence étudiée est pétrographiquement homogène, nous pourrions dans une deuxième approche, partir des teneurs ponctuelles et atteindre cette montée qui actuellement nous sert de base.

Classement des données.

Comment construit-on un variogramme expérimental ? Considérons le plan minier de la figure 8. Il est relatif à l'implantation des prélèvements et des sondages d'une portion de la couche rouge de la mine de Hayange (oxydé, calcaire). On remarque deux directions principales des traçages, le long de chacune desquelles l'échantillonnage est, grosso modo, régulier.

Fig.8- Construction d'un
variogramme expérimental



Dans chaque direction principale, rejoignons au mieux les échantillons par des lignes brisées sensiblement parallèles (lignes 1, 2, A, B...). Chaque échantillon ne doit être pris qu'une fois, au maximum, par direction. On s'arrangera pour que les points soient implantés dans chaque ligne aux multiples d'une distance de base. Si le corroyage est parfaitement régulier, cette condition est automatiquement remplie ; s'il l'est suffisamment, comme ici, on laissera éventuellement quelques blancs dans les lignes, mais on s'assimilera au cas régulier. Si le désordre avait été plus grand, on aurait établi des classes de distances (entre 0 et 80 m, entre 80 et 100 m...) qui peuvent fort bien ne pas être égales, mais qui doivent être d'autant plus serrées que la croissance du variogramme est plus grande.

Ici, on peut adopter le découpage suivant (direction NO-SE) :

Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3	Colonne 4	Colonne 5	etc...
220	219	194	189	188	
221	218	-	-	212	
223	192	150	357	208	
-	222	190	356	211	
384	383	-	-	210	
306	385	-	255	209	
-	273	359	224	207	
264	265	358	232	159	
		270	34		
		258			
		257			
		231			
		244			

Ce découpage appelle quelques remarques. Notons d'abord qu'il n'a été pris qu'un seul type de prélèvements, ceux effectués en couche. Il s'agit ici de trous de mines. Les sondages carottés (R 47, 7 JS ...) qui mesurent la couche de façon bien plus précise ont été pourtant rejetés. En effet, ils sont trop peu nombreux pour servir à eux seuls à la construction d'un variogramme, alors que leur découpage fait par des géologues ne correspond vraisemblablement pas à la couche minière, mais à quelque chose de moins puissant et de plus riche. Nous verrons plus loin comment se répercute l'imprécision du tracé du mineur sur les variogrammes de puissance et de teneur, mais si précisément nous voulons la voir et déduire du variogramme son importance, il n'est pas recommandé de partir de supports mixtes : carottages géologiques, trous de mine miniers.

Une autre remarque. Nous n'avons pas noté dans le texte les colonnes de la figure 8, direction NE-SO, mais on peut voir sur le plan que la distance inter-prélèvements y est de 80 mètres (ex. colonne A) alors que dans la direction NO-SE, elle est de 100 mètres. Cela n'a aucune importance, tant qu'on ne cherche pas à établir un variogramme moyen pour toutes les directions. Par contre, pour les lignes parallèles, dont les résultats seront regroupés ensuite, il est indispensable d'adopter une seule maille (ou un seul découpage en classes) et de s'y tenir.

Notons qu'on aurait pu tracer les variogrammes dans d'autres directions, à l'aide des mêmes points (pourvu que par direction chaque point ne compte qu'une fois). Une teneur nulle, ou l'absence de couche en point, se note zéro, l'absence de prélèvements là où la couche existe est consignée par un petit trait sur le report des colonnes.

Méthode de la bande de papier

Pour calculer les variogrammes, nous allons employer la méthode de la bande de papier. En vis à vis des chiffres de la colonne 1, on recopie les valeurs correspondantes du paramètre dont on calcule le variogramme (teneur en fer ou puissance). Ici, pour des raisons de discrétion, les teneurs qu'on a marquées en vis à vis de chaque numéro d'échantillon ne sont pas les vraies. Plaçons les teneurs de la 1ère colonne (éch. 220, 221, etc...) l'une sous l'autre et reproduisons cette série de chiffres en colonne sur une seconde feuille de papier. Décalons d'un cran les deux feuilles mises côte à côte, comme suit :

colonne 1	valeur absolue des différences	carré des différences	nombre de couples de mesures
33,5			3
32 33,5	1,5	2,25	
31 32	1	1	
- 31			valeur du variogramme $\frac{3,5}{3} = 1,2 \text{ points}^2$
33 -			
32,5 33	0,5	0,25	
- 32,5			
32 -			
		Total : 3,5	

On lit les différences des termes sur une même ligne, sauf quand il y a un tiret, chaque différence est élevée au carré, la valeur moyenne de ces carrés

est le point correspondant du variogramme, pour le pas 1 (distance de base inter-échantillons).

Pour les pas 2, 3, 4 ... on recommence exactement de la même façon, à partir des décalages doubles, triples, etc...

Le variogramme moyen dans la direction considérée est la moyenne des variogrammes de chaque colonne, moyenne pondérée, évidemment, par le nombre de couples de mesures de chaque colonne. Par exemple, pour le pas 1, colonne 2, il vient :

colonne 2	valeur absolue des différences	carré des différences	nombre de couples de mesures
32,5			6
31,5 32,5	1	1	
30,5 31,5	1	1	
33 30,5	1,5	2,25	
33 33	0	0	
32 33	1	1	
33,5 32	1,5	2,25	valeur du variogramme $\frac{7,75}{6} = 1,3 \text{ points}^2$
33 33,5	0,5	0,25	
		Total : 7,75	

Le variogramme moyen, pas 1, de la colonne 1 et la colonne 2 a pour valeur numérique :

$$\frac{3,5 + 7,75}{9} = 1,25 \text{ points}^2$$

En pratique, on ne calculera jamais les variogrammes élémentaires, mais uniquement le variogramme moyen dans le champ supposé homogène. Ainsi les variogrammes moyens de la couche rouge, pour l'ensemble du champ d'où est extrait notre exemple ont pour valeur numérique (établie cette fois à partir des données exactes) :

Tableau III - 8

Direction NO-SE			Direction NE-SO		
d = 100 m			d = 90 m		
d	nombre de couples	valeur du variogramme	d	nombre de couples	valeur du variogramme
1	113	10,8	1	104	5,6
2	92	16,3	2	89	8,9
3	82	13,7	3	78	9,6
4	72	10,9	4	66	10,8
5	58	16,0	5	56	13,2
6	46	16,2	6	46	17,7
7	30	14,8	7	45	17,6
8	23	14,3	8	44	19,4
9	27	16,9	9	43	16,7
10	25	16,9	10	43	17,1
			11	40	13,7
			12	38	15,7

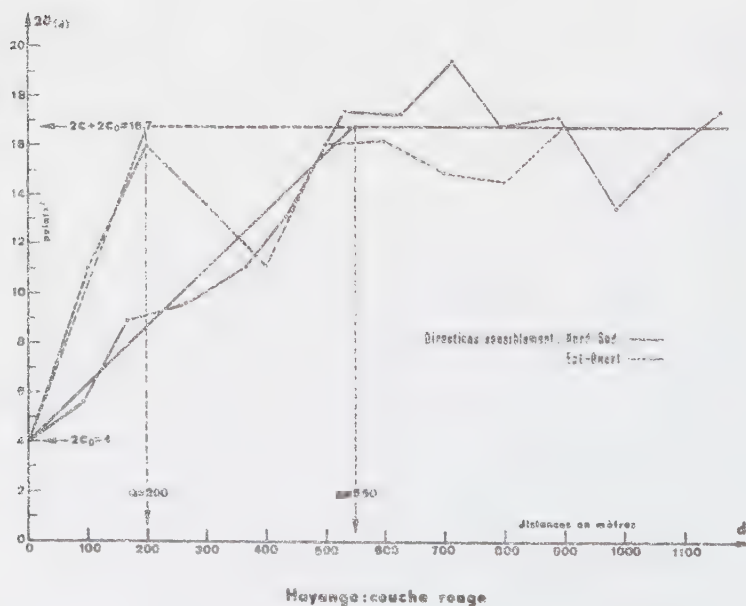
Caractéristiques du support et du champ

Le champ de mesures du variogramme s'étend sur cinq kilomètres carrés. A l'intérieur de ce champ, un ensemble de 160 prélèvements en couche, aussi bien répartis que ceux du plan (fig. 8) ont servi à déterminer numériquement le variogramme. Chaque prélèvement est la somme de trois séries de trous de mine traversant intégralement la couche du toit au mur, à 45° ; chaque série est dans un plan vertical, ces trois plans sont distants de 0,5 m et un mètre.

Présentation des résultats

Les deux variogrammes sont présentés sur la figure 9.

Fig.9-Variogrammes des teneurs en fer



Ils traduisent chacun un phénomène de transition très net et anisotrope. La direction du plus grand allongement (traits pleins) décrit particulièrement bien le phénomène de transition et la rupture à 550 mètres y est franche. Dans la direction perpendiculaire, le palier aussi est atteint, mais après un creux à 400 mètres que dans la représentation schématique par deux droites on a négligé.

Cette représentation symbolique a la raison d'être suivante. Nous aurons, pour tous les problèmes d'estimation minière, à ajuster les variogrammes expérimentaux à des modèles théoriques. Cette opération nécessite d'abord le choix du modèle mathématique, qu'on détermine à l'aide de l'allure générale du variogramme, des connaissances géologiques qu'on a sur la zone étudiée, et des conditions de cohérence mathématique développées au chapitre II. En très bonne approximation pratique, on peut raccorder tous les phénomènes de transition miniers au schéma gaussien, au schéma de Formery et surtout au schéma de Matheron (chapitre IV).

Le choix étant réalisé, il faut ensuite ajuster les paramètres du variogramme expérimental aux valeurs théoriques correspondantes les mieux adaptées. Pour les variogrammes à tangente oblique à l'origine, ce raccordement demande la connaissance de 4 valeurs numériques : celle du point et de la tangente à l'origine et celle du point et de la tangente à l'infini. La tangente à l'infini est évidemment horizontale puisqu'on a affaire à un schéma de transition (encore faut-il pousser le variogramme suffisamment loin pour s'en assurer). On adoptera conventionnellement les notations :

2 Co = point à l'origine

$2 (C_0 + C)$ = point à l'infini

$\frac{2 C}{a} = p$ = pente à l'origine

La pente à l'origine p est déterminée graphiquement à l'aide du variogramme expérimental (c'est même, du point de vue minier, la principale raison d'être du calcul de ce variogramme).

L'ordonnée à l'origine $2 C_0$ sera établie selon les cas, par prolongation graphique, quand ce sera possible, à l'aide d'études directes des régionalisations d'échelle plus petite qui en sont la cause.

Le palier $2 C + 2 C_0$ est le double de la variance a priori des échantillons (chap. II), c'est-à-dire la variance qu'auraient les échantillons si le champ était infini. En présence de champs de dimensions très grandes vis à vis de a , il suffit de prendre la variance expérimentale de l'échantillonnage, sinon on aura recours dans le cas général à un ajustement de proche en proche à l'aide du modèle mathématique adopté, de la variance expérimentale, de C_0 et de p . Ce problème sera traité au chapitre IV, à propos des modèles géostatistiques. Dans tous les exemples du texte, les calculs des paliers sont déjà faits, quel que soit l'ajustement et l'on représente symboliquement sur les graphiques les 4 paramètres clefs du variogramme par des portions de droites d'équations :

$$y = 2 C_0 + p h \quad \text{pour } h < a$$

$$y = 2 C + 2 C_0 \quad \text{pour } h \geq a$$

Voilà donc, à partir d'un exemple concret, comment tirer de la masse des informations minières usuelles les paramètres géostatistiques clefs du phénomène de transition (teneur, tonnage, puissance...) intrinsèque qu'on cherche à estimer.

ETUDES PRATIQUES

CHAPITRE IV

LES SCHEMAS STATISTIQUES

- 1 - Notations utilisées dans la tabulation des schémas
- 2 - Le schéma de Matheron
- 3 - Le schéma de Formery
- 4 - Le schéma gaussien
- 5 - Le schéma linéaire
- 6 - Schémas avec effet de trou
- 7 - Exercice-type C : ajustement d'un variogramme expérimental à un modèle théorique.

CHAPITRE IV

LES SCHEMAS STATISTIQUES

Les études pratiques du chapitre IV sont divisées en deux parties. Il y a d'abord la longue tabulation des trois principaux schémas (Matheron, Formery, Gauss), suivie de quelques compléments sur l'approximation des deux premiers d'entre eux au schéma linéaire. Dans ce dernier cas, on a calculé en plus la variance d'un point dans un triangle et la variance d'extension d'un triangle reconnu par ses trois sommets. On donne aussi un équivalent linéaire des rectangles et parallélogrammes.

La seconde partie est un exercice-type très important : celui de l'ajustement des variogrammes expérimentaux à leurs modèles théoriques.

1. NOTATIONS UTILISEES DANS LA TABULATION DES SCHEMAS

ℓ et h sont relatifs aux côtés des volumes, surfaces ou segments étudiés. Comme au chapitre II, le nombre de dimensions de la montée n'est pas indiqué autrement que par le nombre de paramètres qui interviennent dans chaque formule, $\gamma(r)$ étant la fonction intrinsèque de la variable ponctuelle, et les derniers paramètres cités (après le point virgule) sont toujours les plus spécifiques du domaine d'intégration ; ces notations conventionnelles se comprendront très vite d'elles-mêmes. A trois dimensions, par exemple, il vient à propos du parallélépipède rectangle d'arêtes ℓ , h , h'

(IV, 1)

$\gamma(\ell; h, h') =$ moyenne de $\gamma(r)$ entre les deux faces hh' distantes de ℓ

$X(\ell; h, h') =$ moyenne de $\gamma(r)$ entre le parallélépipède et une face hh'

$F(\ell, h, h') =$ moyenne de $\gamma(r)$ dans le parallélépipède

$H(hh'; \ell) =$ moyenne de $\gamma(r)$ entre les deux faces contenant ℓ
(perpendiculaires à hh' ou encore moyenne de $\gamma(r)$
entre l'arête ℓ et le parallélépipède).

Pour ne pas avoir à manipuler numériquement des abaques à trois entrées, on considérera toujours des parallélépipèdes à base carrée. Les deux indices répétés étant h , on placera systématiquement en regard chaque fonction définie à deux dimensions (rectangle ℓ, h) et à trois (parallélépipède ℓ, h, h) correspondant aux deux cas extrêmes d'isotropie où la face hh' est soit un carré, soit un segment de droite. On pourra en sorte reconstituer par interpolation les cas intermédiaires.

Abaques de montées

Les deux premiers abaques sont les montées d'ordre 1 et d'ordre 2 :

(IV, 2)

$$M(\ell; h) = \gamma(\ell; h) - \gamma(0; h)$$

$$M(\ell; h, h) = \gamma(\ell; h, h) - \gamma(0; h, h)$$

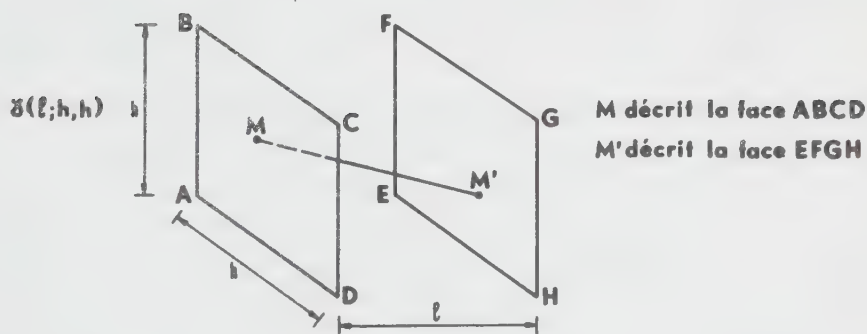
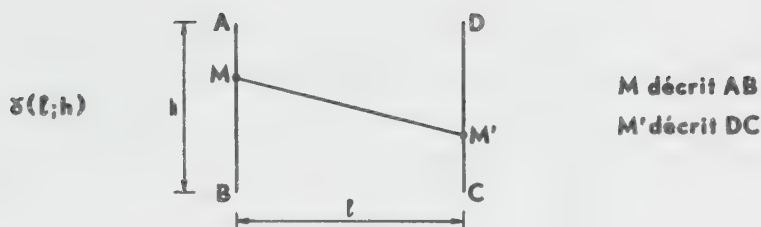


Figure 1: Montées d'ordre 1 et 2.

Ces deux montées seront tabulées et présentées sur des abaques d'axes linéaires. On portera la fonction M sur l'axe Oy et la variable ℓ sur l'axe Ox . Pour un abaque donné, seront construites les différentes fonctions intrinsèques quand augmente la puissance du sondage de longueur h , ou du panneau de prélèvement $h \times h$. Cet élargissement étend le nombre des schémas de base à toutes les régularisées par montées d'ordre 1 et 2 du demi-vario-gramme ponctuel.

$$g(0, h) \\ = F(h)$$



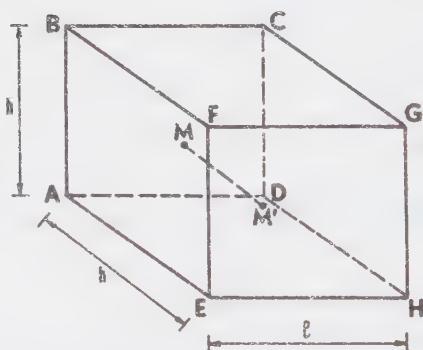
M décrit AB
M' décrit AB

$$g(0; \ell, h) \\ = F(\ell, h)$$



M et M' décrivent la surface
du rectangle ABCD

$$g(0; \ell, h, h) \\ = F(\ell, h, h)$$



M et M' décrivent le volume
du parallépipède
ABCDEFGH

Figure 2: Fonctions F à 1, 2 et 3 dimensions.

Abaques de variance

Les fonctions $F(h)$; $F(\ell, h)$; $F(\ell, h, h)$ sont respectivement les variances d'un point dans le segment ℓ , le rectangle ℓ, h et le parallélépipède de ℓ, h, h , dans un schéma de transition de variance à priori unité.

D'après la formule de Krige, la variance du volume lui-même est égale à un diminué de la fonction F correspondante. Par définition, on a :

$$\begin{aligned} F(h) &= \chi(0; h) \\ (IV, 3) \quad F(\ell, h) &= \chi(0; \ell, h) \\ F(\ell, h, h) &= \chi(0; \ell, h, h) \end{aligned}$$

Les domaines d'intégrations sont ceux de la figure 2. La fonction F à une dimension, d'expression analytique simple, ne sera pas mise en abaqes, mais uniquement formulée et tabulée. Le calcul de $F(\ell, h)$ et $F(\ell, h, h)$ par contre se poursuivra jusqu'aux abaqes, tracés en papier logarithmique (axes ℓ , et h). On pourra pratiquement utiliser l'intersection du réseau d'abaques de $F(\ell, h)$ avec l'axe Ox ($\ell = 0, 1$) pour connaître $F(h)$ à une dimension.

Abaques de variances d'extensions

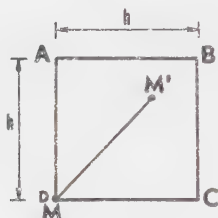
Il faut, pour atteindre les variances d'extension, passer par des fonctions intermédiaires du type $X(\ell; h, h)$ et $H(h, h; \ell)$. Les intermédiaires ne seront pas tabulées, mais uniquement les variances d'extension correspondantes. S'il se trouvait, pour des calculs de krigeage par exemple, qu'elles aient à intervenir, elles peuvent être déterminées immédiatement par les relations

$$H(\ell) = X(\ell)$$



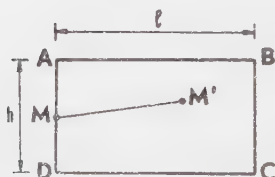
M fixe en A
M' décrit AB

$$H(h, h)$$



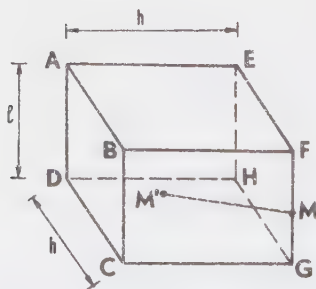
M fixe en D
M' décrit le carré ABCD
ou encore :
M décrit AD
M' décrit BC

$$X(\ell; h)$$



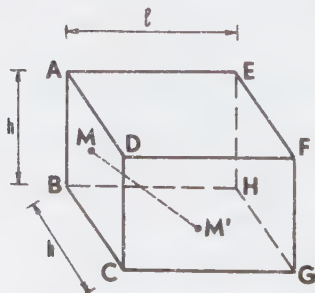
M décrit AD
M' décrit le rectangle ABCD

$$H(h, h; \ell)$$



M décrit FG
M' décrit le parallépipède
ou encore :
M décrit la face EFGH
M' décrit la face BFGC

$$X(\ell; h, h)$$



M décrit la face ABCD
M' décrit le parallépipède

Figure 3: Fonctions de covariances

linéaires qui les expriment en fonction des variances et des variances d'extension.

On aura besoin de :

$$\begin{aligned}
 & H(\ell) = X(\ell) \\
 & H(h, h) \\
 & X(\ell; h) \\
 & H(h, h; \ell) \\
 & X(\ell; h, h)
 \end{aligned}$$

(IV, 4)

dont la signification géométrique est fournie par la figure 3.

Les variances d'extension elles-mêmes seront regroupées comme suit :

Premier abaque : (axe Ox, le côté ℓ ; axe Oy, les variances)

$$\begin{aligned}
 & \text{- Variance d'extension } \sigma^2 E_1 \text{ du point milieu dans le segment de longueur } \ell \\
 & \quad \sigma^2 E_1 = 2 X(\ell/2) - F(\ell) \\
 & \text{- Variance d'extension } \sigma^2 E_2 \text{ du point central dans le carré de côtés } \ell : \\
 & \quad \sigma^2 E_2 = 2 H(\ell/2, \ell/2) - F(\ell, \ell)
 \end{aligned}$$

(IV, 5)

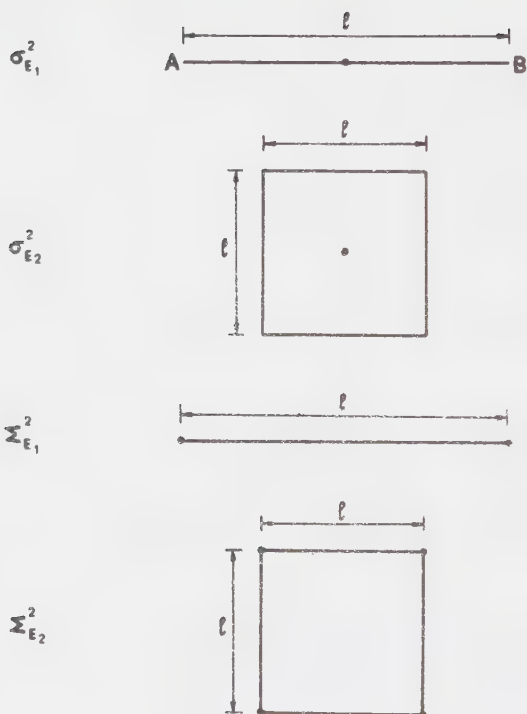


Figure 4: Variances d'extensions de prélèvements ponctuels

- Variance d'extension $\sum_{E_1}^2$ dans le segment ℓ de ses deux extrémités :

$$\sum_{E_1}^2 = 2 X(\ell) - F(\ell) - \frac{1}{2} \gamma(\ell)$$

- Variance d'extension $\sum_{E_2}^2$ dans le carré ℓ, ℓ de ses quatre points d'angle :

$$\sum_{E_2}^2 = 2 H(\ell, \ell) - F(\ell, \ell) - \frac{1}{4} [2 \gamma(\ell) + \gamma(\ell\sqrt{2})]$$

Soit géométriquement : (figure 4)

Le second abaque, en vis à vis du précédent, est relatif à $\sigma_{E_3}^2$.

On portera cette fois-ci les deux paramètres de longueur ℓ , et h le 3^{e} long des axes, le réseau de courbes étant constitué des isovariances. La variance d'extension $\sigma_{E_3}^2$ d'un sondage axial dans le parallélépipède à base carrée ℓ, h, h est :

$$(IV, 6) \quad \sigma_{E_3}^2 = 2 H\left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2}; \ell\right) - F(\ell, h, h) - F(\ell)$$

Géométriquement, $\sigma_{E_3}^2$ représente :

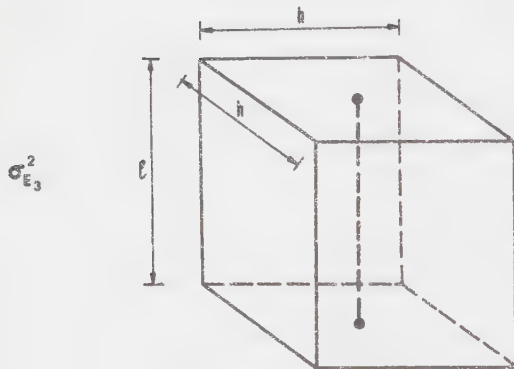


Figure 5: Variance d'extension d'un sondage axial dans le parallélépipède à base carrée $l \times h \times h$.

Les deux derniers abaques regroupés côte à côte représentent respectivement $\sigma_{E_4}^2$, variance d'extension du traçage médiane h dans le rectangle $l \cdot h$ et $\sigma_{E_5}^2$ variance d'extension de la section médiane $h \cdot h$ dans le parallélépipède $l \cdot h \cdot h$.

Géométriquement, $\sigma_{E_4}^2$ et $\sigma_{E_5}^2$ représentent :

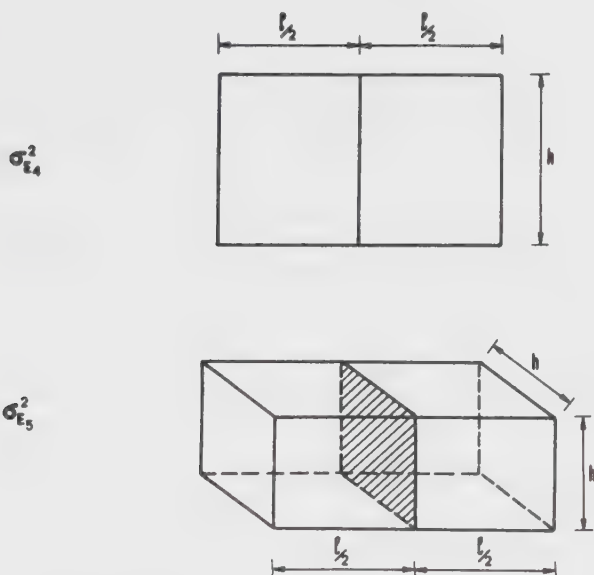


Figure 6: Variances d'extension du tracé médian h dans le rectangle $l \times h$ et de la section médiane $h \times h$ dans le parallélépipède $l \times h \times h$.

Voilà donc les quatre groupes de formules et d'abaques qui caractériseront chaque schéma.

Pour les calculer, deux voies ont été adoptées. On a soit résolu formellement les intégrales et déterminé numériquement leurs valeurs sur un ordinateur ensuite, soit directement calculé cette valeur par des méthodes d'analyse numérique (toujours sur ordinateur). L'un ou l'autre des procédés a été choisi suivant sa commodité. Nous ne reproduisons ici l'étape de calcul intégral que quand elle est suffisamment simple pour présenter de l'intérêt. De toute façon, les résultats numériques sont reportés sous forme d'un réseau d'abaques défini avec la précision de ± 1 pour mille.

2. SCHEMAS DE MATHERON

Les schémas de Matheron sont définis par :

$$(IV, 8) \quad \gamma(r) = C \left[1 - \frac{1}{V_n} K_n(r) \right]$$

ou V_n est le volume de l'hypersphère à n dimensions et $K_n(r)$ son covariogramme géométrique.

Un schéma de Matheron étant défini dans l'espace à n dimensions, tous les calculs qui portent sur des sous espaces à $n - k$ dimensions sont possibles. Par exemple, on peut calculer des montées d'ordre 1 et 2 du schéma sphérique où $n = 3$. Par contre, si l'on se donne le schéma défini pour $n = 1$, à partir du covariogramme géométrique d'un segment, la fonction $F(\ell, h)$ ou variance d'un point dans un rectangle, n'a à priori pas de signification physique et n'a aucune raison de correspondre à un variogramme mathématiquement cohérent, à savoir du type positif conditionnel.

En effet, on peut toujours couper l'espace à 3 dimensions par des plans ou des droites, où la régionalisation sera toujours régie par un variogramme sphérique, mais l'on ne peut pas introduire un plan ou tout l'espace dans une droite qui serait le champ d'une régionalisation à schéma de Matheron à une dimension.

Nous calculons ci-dessous les schémas de Matheron à une et trois dimensions.

2.1. Schéma de Matheron à une dimension

Il a pour fonction caractéristique (cf. fig. IV-6 bis) :

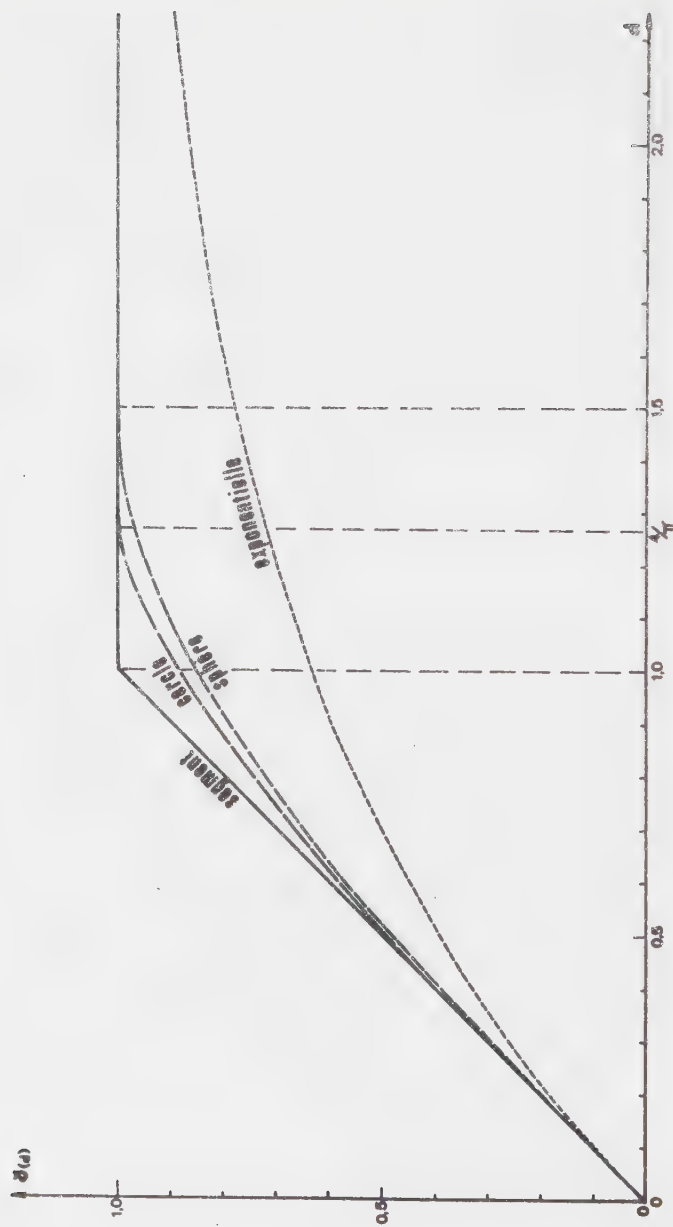
$$(IV, 9) \quad \left[\begin{array}{ll} \gamma(h) = \frac{C}{a} h & h < a \\ \gamma(h) = C & h \geq a \end{array} \right.$$

Les fonctions $F(h)$ et $\sigma_{E_1}^2(h)$ sont immédiates, on a :

$$(IV, 10) \quad \left[\begin{array}{ll} F(h) = C \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{a} & h < a \\ \sigma_{E_1}^2(h) = C \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{h}{a} & \end{array} \right.$$

$$(IV, 11) \quad \left[\begin{array}{ll} F(h) = 1 - \frac{a}{h} + \frac{1}{3} \frac{a^2}{h^2} & a \leq h < 2a \\ \sigma_{E_1}^2(h) = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{a} + \frac{a}{h} - 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{h^2} & \end{array} \right.$$

Fig.6b - Fonctions intrinsèques des schémas de Matheron et du schéma de Formery.



$$(IV, 12) \quad \left[\begin{array}{l} F(h) = 1 - \frac{a}{h} + \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{h^2} \\ \sigma_{E_1}^2(h) = 1 - \frac{a}{h} - \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{h^2} \end{array} \right. \quad 2a \leq h$$

2.2. Schéma de Matheron à trois dimensions

Lorsqu'on parlera du schéma de Matheron, sans préciser davantage, il s'agira de celui-ci (cf. fig. IV-6 bis) :

$$(IV, 13) \quad \left[\begin{array}{l} \gamma(h) = C \left[\frac{3}{a} \frac{h}{a} - \frac{1}{2} \frac{h^3}{a^3} \right] \\ \gamma(h) = C \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} h < a \\ h \geq a \end{array}$$

2.2.1. Fonctions usuelles à une dimension

Les fonctions $F(h)$, $X(h)$ et $\sigma_{E_1}^2(h)$ s'obtiennent, ici encore, immédiatement :

$$(IV, 14) \quad \left[\begin{array}{l} X(h) = C \left[\frac{3}{4} \frac{h}{a} - \frac{1}{8} \frac{h^3}{a^3} \right] \\ F(h) = C \left[\frac{1}{2} \frac{h}{a} - \frac{1}{20} \frac{h^3}{a^3} \right] \end{array} \right. \quad h < a$$

$$(IV, 15) \quad \left[\begin{array}{l} X(h) = C \left[1 - \frac{3}{8} \frac{a^2}{h^2} \right] \quad h \geq a \\ F(h) = C \left[1 - \frac{3}{4} \frac{a}{h} + \frac{1}{5} \frac{a^2}{h^2} \right] \end{array} \right.$$

$$(IV, 16) \quad \left[\begin{array}{l} \frac{1}{C} \cdot \sigma_{E_1}^2(h) = \left[\frac{1}{4} \frac{h}{a} + \frac{3}{160} \frac{h^3}{a^3} \right] \quad h < a \\ \quad \quad \quad = \frac{3}{4} \frac{h}{a} - \frac{1}{32} \cdot \frac{h^3}{a^3} - 1 + \frac{3}{4} \frac{a}{h} - \frac{1}{5} \frac{a^2}{h^2} \quad a \leq h < 2a \\ \quad \quad \quad = 1 - \frac{3}{4} \frac{a}{h} - \frac{1}{5} \frac{a^2}{h^2} \quad h > 2a \end{array} \right.$$

2.2.2. Montée d'ordre 1

A deux dimensions, les cas de figure se multiplient. Pour la montée d'ordre 1, nous avons besoin de l'algorithme :

$$\gamma(h; \ell) = \frac{2}{\ell^2} \int_0^\ell (\ell - x) \gamma(\sqrt{x^2 + h^2}) dx$$

Son expression s'écrit, dans les trois cas de figure possibles :

$$1) \ell^2 + h^2 < a^2$$

$$(IV, 17) \quad \left[\begin{array}{l} \frac{1}{C} \gamma(h; \ell) = + \frac{3}{2a} \left[\sqrt{\ell^2 + h^2} + \frac{h^2}{\ell} \log \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + h^2}}{h} - \frac{2}{3} \frac{\sqrt{(\ell^2 + h^2)^3} - h^3}{\ell^2} \right] \\ - \frac{1}{2a^3} \left[\frac{\sqrt{\ell^2 + h^2}}{\ell^2} (\ell^2 + \frac{5}{2} h^2) + \frac{3}{4} \frac{h^4}{\ell} \log \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + h^2}}{h} - \frac{2}{5} \frac{\sqrt{(\ell^2 + h^2)^5} - h^5}{\ell^2} \right] \end{array} \right.$$

$$2) \quad h^2 < a^2 \leq h^2 + \ell^2$$

$$(IV, 18) \quad \left[\frac{1}{C} \gamma(h; \ell) = \frac{3}{2} \left\{ 1 + \frac{a}{\ell} \left[\frac{h^2}{a^2} \log \frac{a + \sqrt{a^2 - h^2}}{h} - \sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}} \right] + \frac{a^2}{\ell^2} \left[\frac{1}{3} - \frac{h^2}{a^2} + \frac{2}{3} \frac{h^3}{a^3} \right] \right\} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \sqrt{\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{h^2}{\ell^2}} \right)^2 + \frac{a}{2\ell} \left[\frac{3}{2} \frac{h^4}{a^4} \log \frac{a + \sqrt{a^2 - h^2}}{h} + \sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{h^2}{a^2} \right) \right] \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{5} \left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{h^5}{a^3 \ell^2} \right) \right\} \right]$$

$$3) \quad a^2 \leq h^2$$

$$(IV, 19) \quad \frac{1}{C} \gamma(h; \ell) = 1$$

2.2.3. Fonction $F(\ell, h)$

La donnée de la fonction $F(\ell, h)$ suffit pour déterminer par dérivation les fonctions $X(\ell, h)$ et $H(\ell, h)$, puisque :

$$X(h; \ell) = \frac{1}{2h} \frac{\partial h^2 F(h, \ell)}{\partial h}$$

$$H(h, \ell) = \frac{1}{4h\ell} \frac{\partial^2 \ell^2 h^2 F(h, \ell)}{\partial \ell \partial h} = \frac{1}{2\ell} \frac{\partial \ell^2 X(h, \ell)}{\partial \ell}$$

Nous n'écrivons donc que la fonction $F(h, \ell)$. D'autre part, nous ne l'écrivons pas dans tous les cas de figure, au nombre de 5, mais uniquement dans les deux cas extrêmes, lorsque $\sqrt{\ell^2 + h^2} < a$ ou au contraire lorsque $\ell > a$ et $h > a$. Ces cas sont les plus simples, bien que déjà d'une écriture assez lourde. Les expressions littérales qui suivent n'auront l'occasion de servir que dans des calculs de krigeage ou d'optimum économique (exercices J, K, L), il suffira alors de ne calculer les optimums que dans les deux cas extrêmes et d'interpoler. Quant aux fonctions $F(\ell, h)$ et $X(h, \ell)$ en elles-même, elles seront fournies, indépendamment de ce calcul, par voir numérique (cf. Abaques ci-dessous).

1°) $\sqrt{\ell^2 + h^2} < a$, on a dans ce cas :

$$\begin{aligned}
 & F(\ell, h) = \\
 & \frac{3}{2} \frac{C}{a} \left[\sqrt{\ell^2 + h^2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{15} \frac{\ell^2}{h^2} - \frac{1}{15} \frac{h^2}{\ell^2} \right) + \frac{1}{15} \left(\frac{\ell^3}{h^2} + \frac{h^3}{\ell^2} \right) + \frac{1}{6} \frac{\ell^2}{h} \log \frac{h + \sqrt{\ell^2 + h^2}}{\ell} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{6} \frac{h^2}{\ell} \log \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + h^2}}{h} \right] \\
 & - \frac{1}{60} \frac{C}{a^3} \left\{ \frac{7}{2} (\ell^2 + h^2)^{3/2} + \frac{3}{2} \left[\frac{\ell^4}{h} \log \frac{\sqrt{h^2 + \ell^2} + h}{\ell} + \frac{h^4}{\ell} \log \frac{\sqrt{h^2 + \ell^2} + \ell}{h} \right] \right. \\
 & \left. - \frac{4}{7} (\ell^2 + h^2)^{5/2} \left(\frac{\ell^5}{h^7} + \frac{h^5}{\ell^7} \right) + \frac{4}{7} \left(\frac{\ell^5}{h^2} + \frac{h^5}{\ell^2} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

2°) $\ell > a$; $h > a$, il vient alors :

$$(IV, 21) \quad \left[\begin{aligned} \frac{1}{C} F(\ell, h) &= \frac{3}{2} \left[1 - \frac{\pi}{3} \frac{a^2}{\ell h} + \frac{1}{3} \frac{a^2}{\ell h} \left(\frac{a}{\ell} + \frac{a}{h} \right) - \frac{1}{10} \frac{a^4}{\ell^2 h^2} \right] \\ &- \frac{1}{2} \left[1 - \frac{6\pi}{10} \frac{a^2}{\ell h} + \frac{2}{3} \frac{a^2}{\ell h} \left(\frac{a}{\ell} + \frac{a}{h} \right) - \frac{3}{14} \frac{a^4}{\ell^2 h^2} \right] \end{aligned} \right]$$

2.2.4. Etude particulière des panneaux carrés

Lorsque $h = \ell = b$, les fonctions $F(b, b)$ et $H(b, b)$ (covariance d'un carré avec un de ses sommets) s'écrivent :

$$1^\circ) b < \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$(IV, 22) \quad \left[\begin{aligned} \frac{1}{C} \cdot F(b, b) &= 0,7821 \frac{b}{a} - 0,1204 \frac{b^3}{a^3} \\ \frac{1}{C} \cdot H(b, b) &= 1,1478 \frac{b}{a} - 0,3136 \frac{b^3}{a^3} \end{aligned} \right]$$

$$2^\circ) \frac{a}{\sqrt{2}} < b < a$$

$$(IV, 23) \quad \left[\begin{aligned} \frac{1}{C} F(b, b) &= \frac{2}{3} - 105 \frac{b^3}{a^3} + \frac{1}{5} \frac{b}{a} + \frac{2}{5} \frac{a^2}{b^2} \left[1 + \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{Arcsin} \frac{b}{a} \right] + \frac{3}{70} \frac{a^4}{b^4} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{b}{a} \left(1 - \frac{1}{10} \frac{b^2}{a^2} \right) \log \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} \left(\frac{13}{15} + \frac{a^2}{3b^2} + \frac{1}{20} \frac{b^2}{a^2} \right) \end{aligned} \right]$$

$$(IV, 23) \quad \left[\begin{aligned} \frac{1}{C} H(b, b) &= 1 - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} \left(\frac{11}{20} + \frac{3}{40} \frac{b^2}{a^2} \right) + \log \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \left(\frac{b}{2a} - \frac{3}{40} \frac{b^3}{a^3} \right) \\ &+ \left(\frac{\tilde{II}}{2} - 2 \operatorname{Arcsin} \frac{b}{a} \right) \frac{a^2}{10 b^2} \end{aligned} \right]$$

$$3^\circ) b \geq a$$

$$(I V, 24) \quad \left[\begin{aligned} \frac{1}{C} F(b, b) &= 1 - \frac{\tilde{II}}{5} \frac{a^2}{b^2} + \frac{1}{3} \frac{a^3}{b^3} - \frac{3}{70} \frac{a^4}{b^4} \\ \frac{1}{C} H(b, b) &= 1 - \frac{\tilde{II}}{20} \frac{a^2}{b^2} \end{aligned} \right]$$

Ces fonctions suffisent pour le calcul du krigeage des panneaux carrés. De plus, moyennant les approximations de l'équivalent linéaire (cf. plus loin dans ce chapitre), elles permettent aussi de kriger les panneaux rectangulaires de diagonale inférieure à la portée. (On pourra d'ailleurs vérifier sur les abaques de krigeage que les corrections d'anisotropie entre un carré et un rectangle sont très faibles).

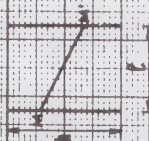
2.2.5. Abaques

A trois dimensions, les cas de figure se multiplient encore plus et les formules se compliquent. Il est plus commode d'entreprendre la résolution numérique directe des algorithmes de base que de résoudre les intégrales correspondantes. Pour ne pas avoir à manipuler trois paramètres dans la présentation des résultats, l'une des anisotropies a été réduite à ces deux valeurs extrêmes en sorte que tous les parallélépipèdes rectangles envisagés ont pour côté ℓ , h , h ; ℓ , h , o (rectangle). Chaque fonction est regroupée sur deux abaques placés côte à côte correspondant à l'un ou l'autre de ces deux types extrêmes. En ce qui concerne le schéma de Matheron, il vient :

ABAQUES

Fig. 7. Schéma de Mathéron

Variogrammes de la moitié d'ordre 1



$$\gamma(h) = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{h^2}{l^2} \right) \quad \text{for } h \leq l$$

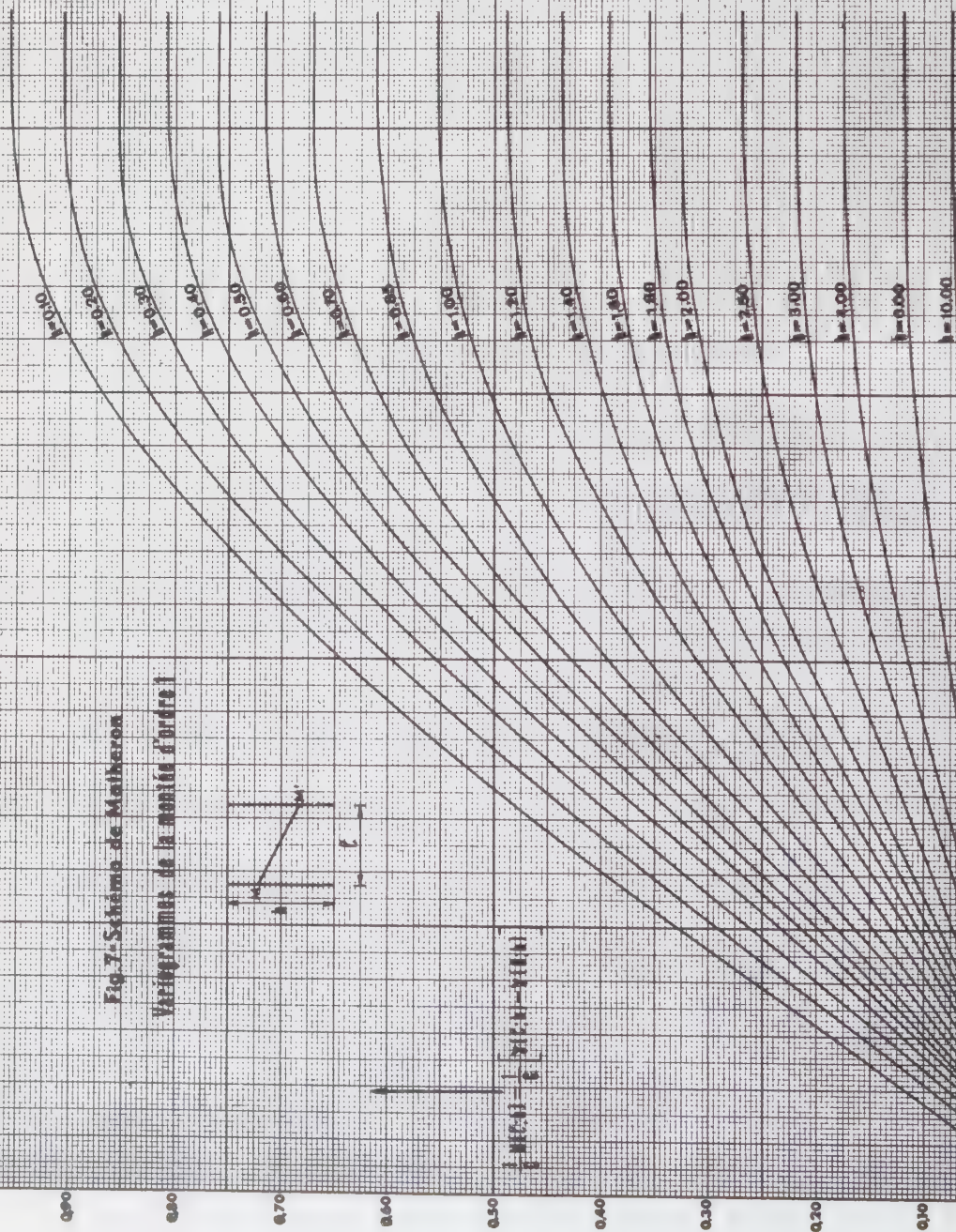
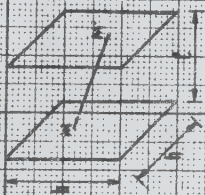
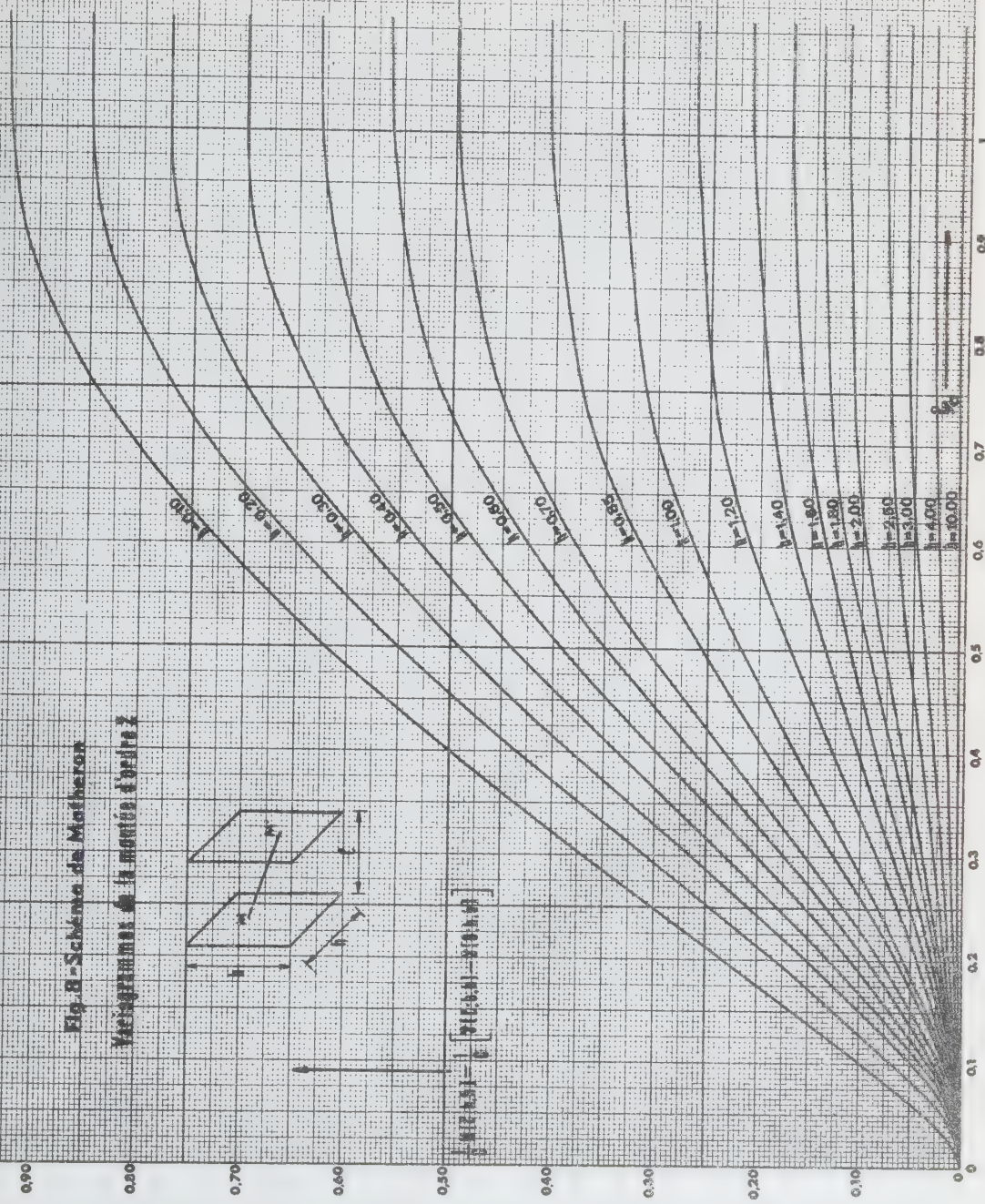


Fig. 8-Schema de Motheron

Variogramme de la monnaie d'ore et



$$\frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) \right]$$



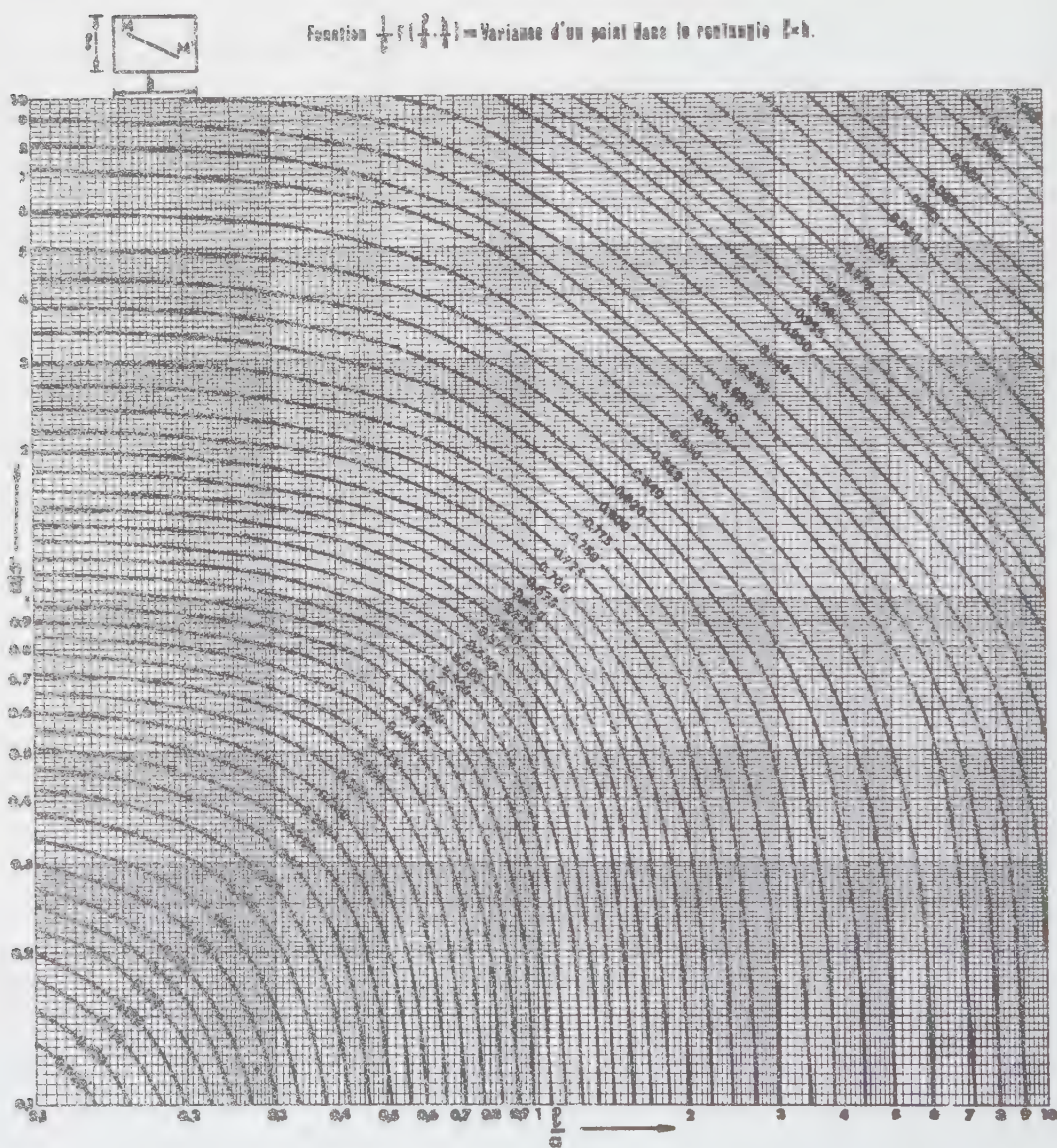


Fig.9-Schéma de Matheron



Fonction $\frac{1}{C} F\left(\frac{l}{C}, \frac{b}{C}, \frac{h}{C}\right)$ = Variance d'un point dans le parallépipède $l \times b \times h$.

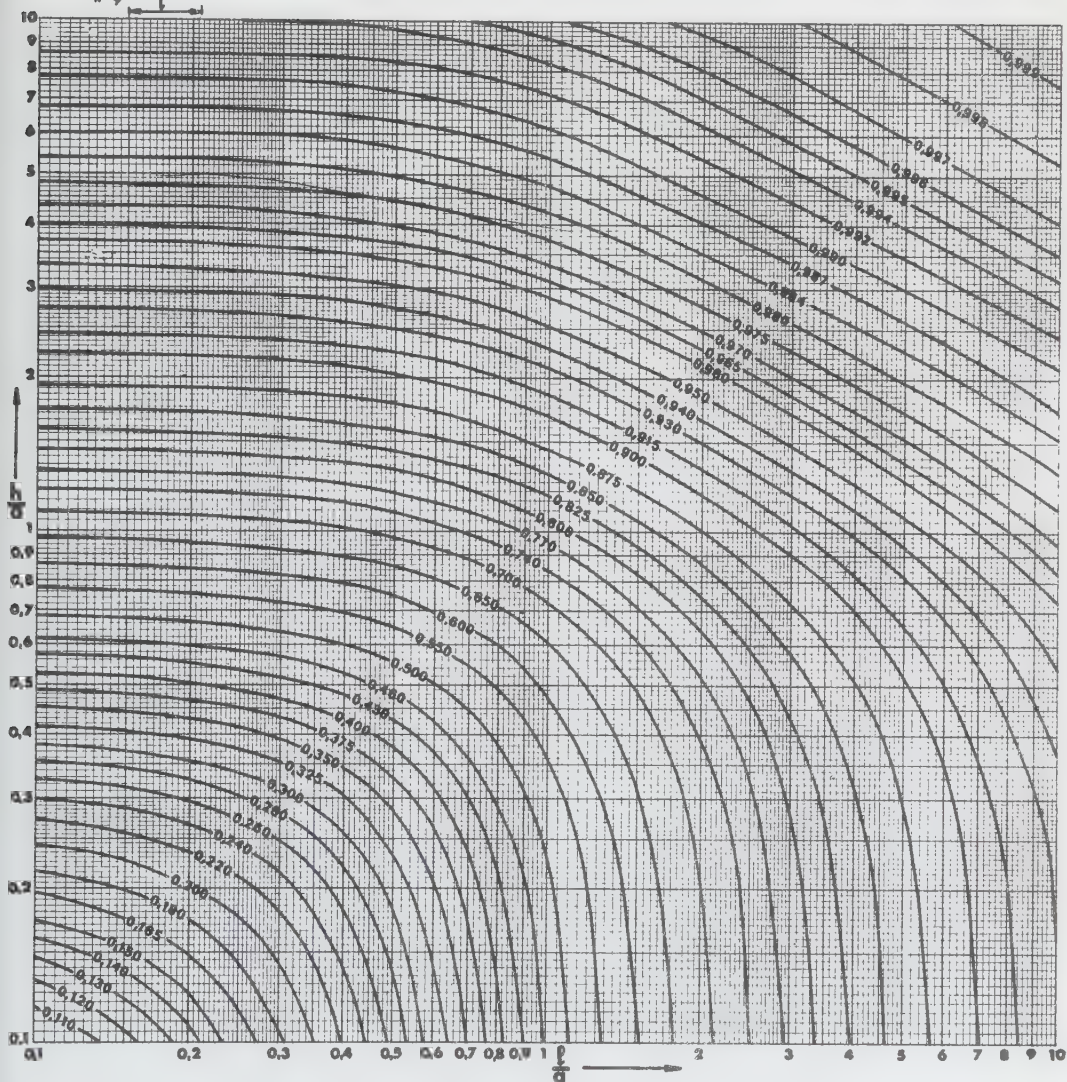


Fig.10-Schéma de Matheron

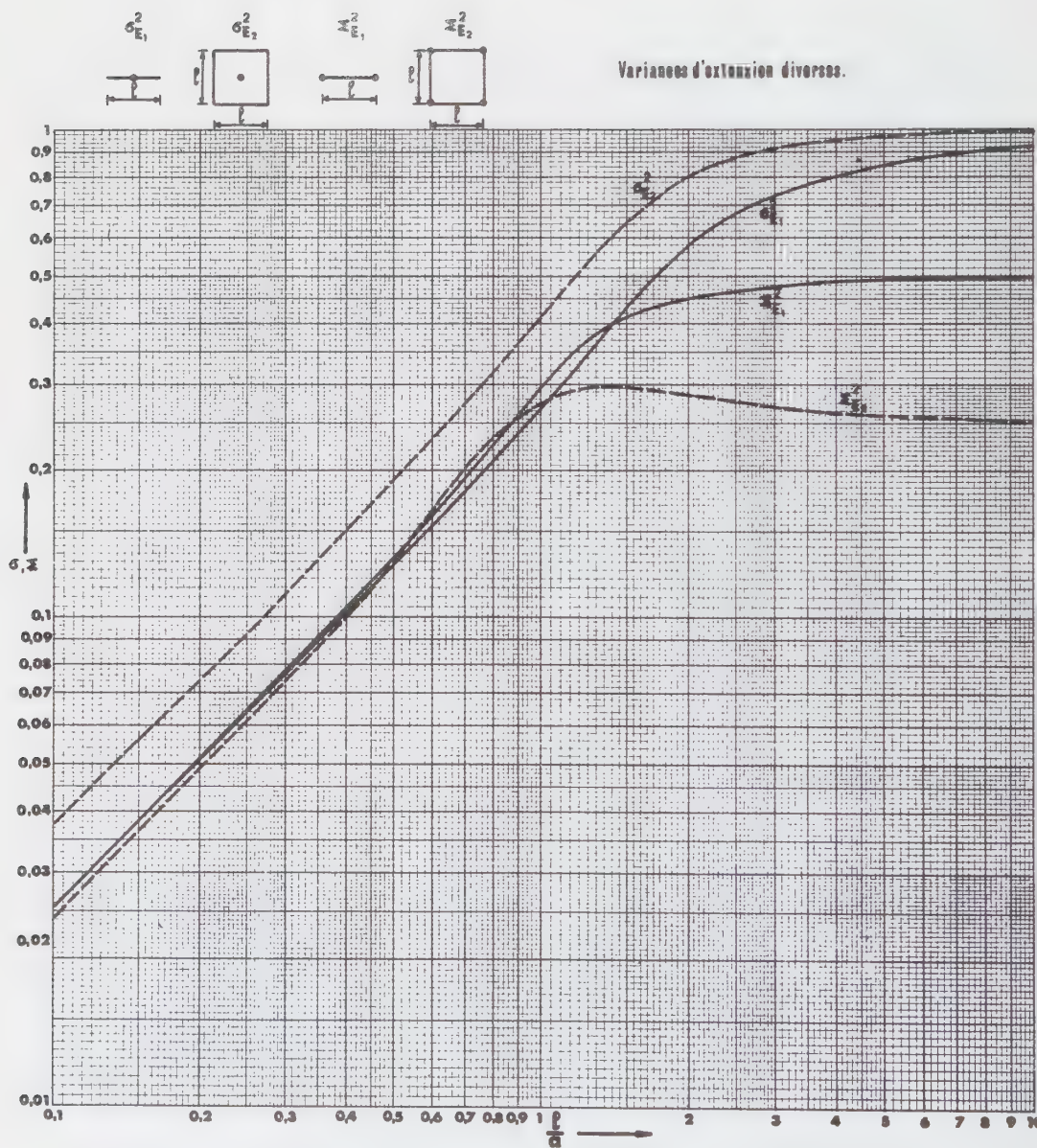
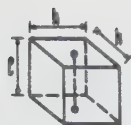


Fig.11-Schéma de Matheron



Variance d'extension d'un sondage axial dans le parallélépipède à base carrée $c=h$.

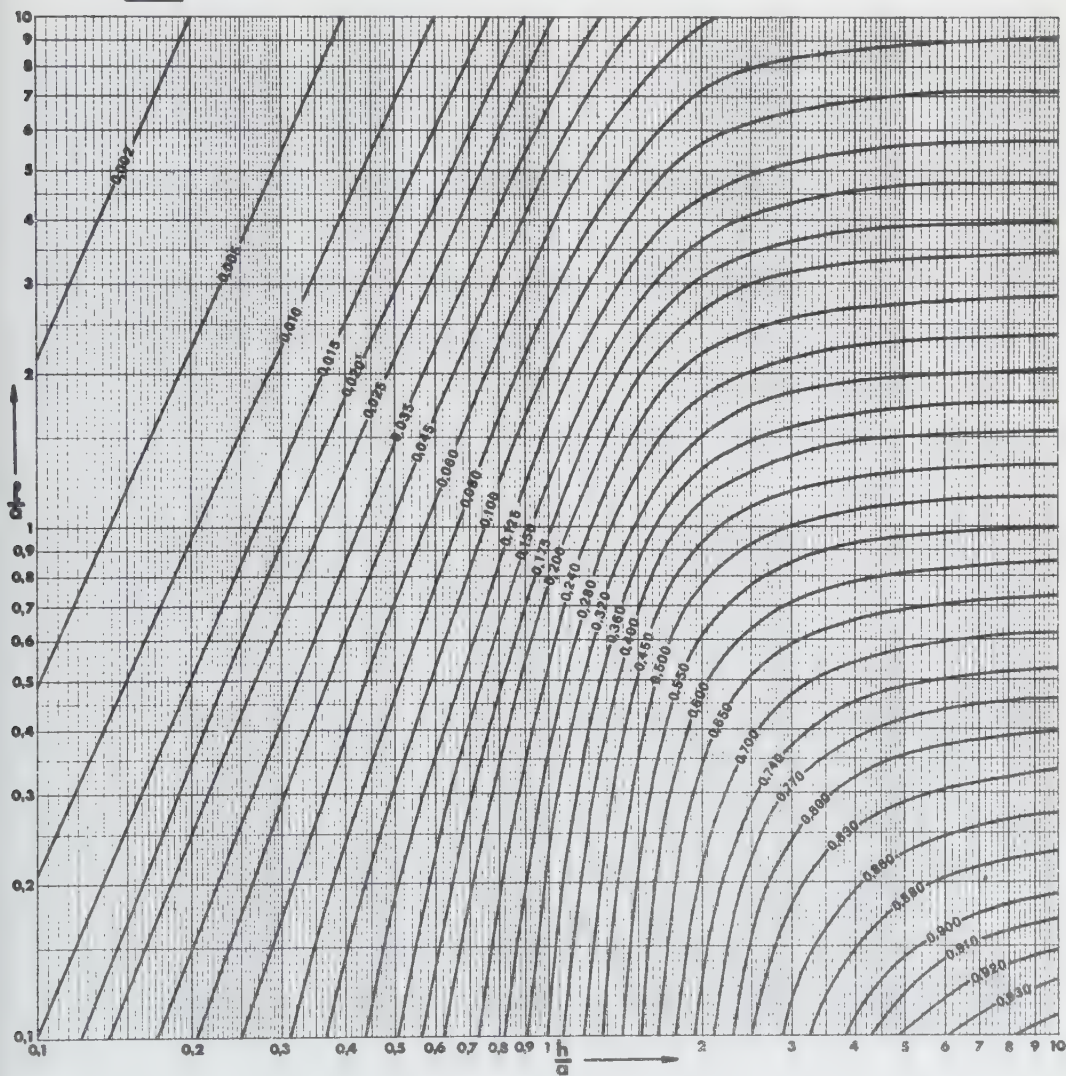
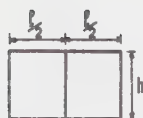


Fig.12-Schéma de Matheron



Variance d'extension du traçage médian h dans le rectangle $b \times h$

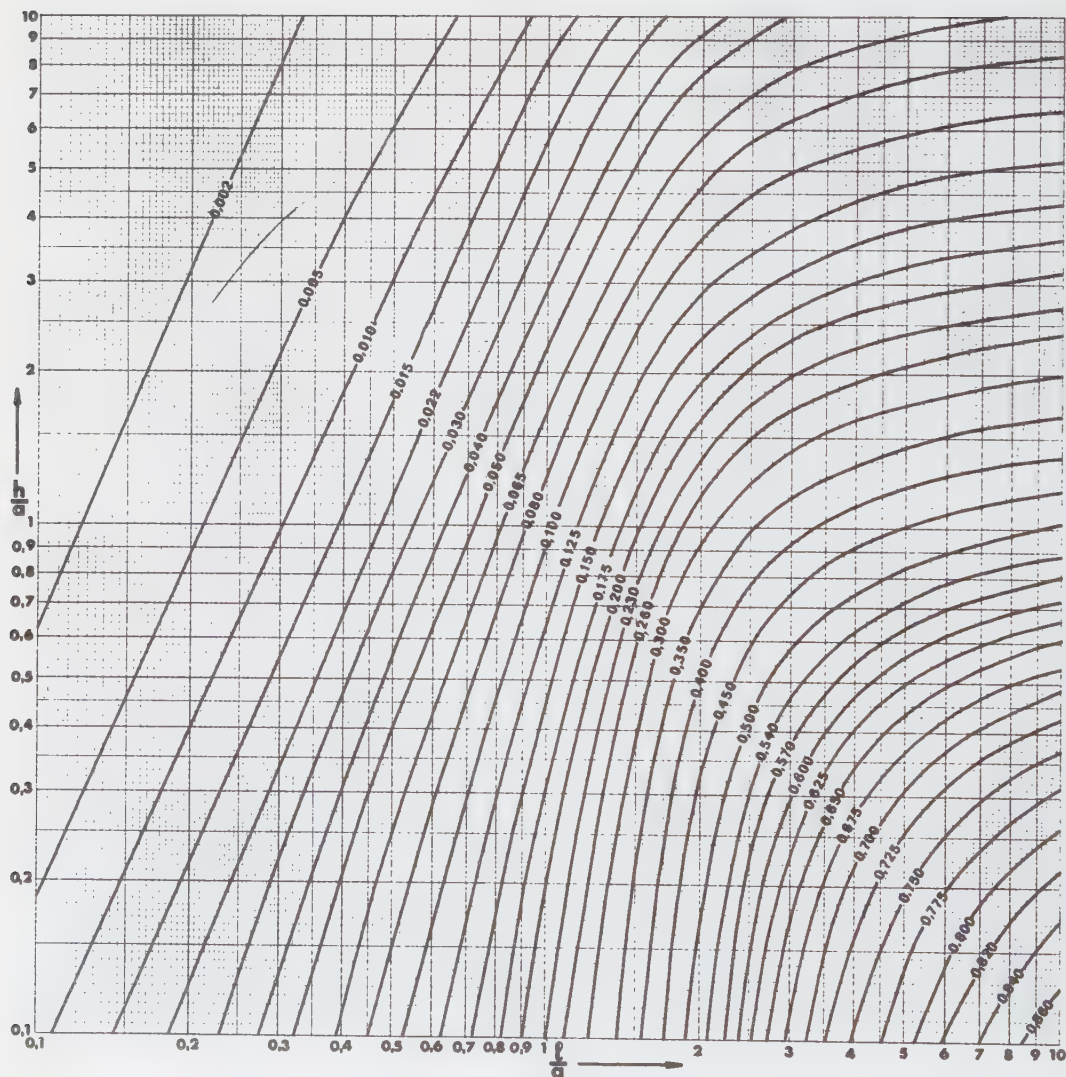
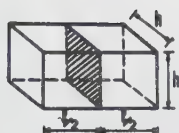


Fig.13-Schéma de Matheron



Variances d'extension de la section médiane $h=h$ dans le parallélépipède $2 \times h \times h$

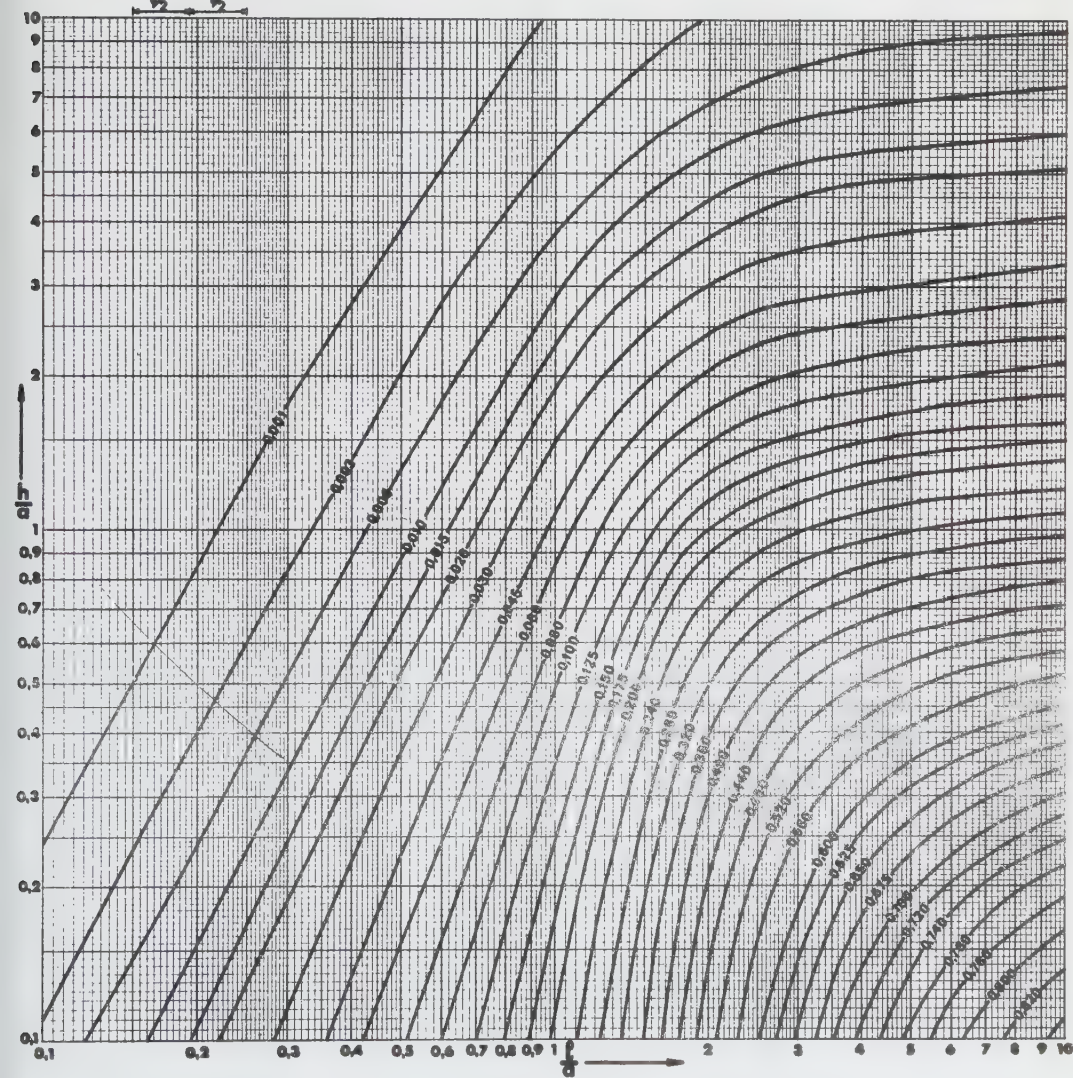


Fig.14-Schéma de Matheron

3. SCHEMA DE FORMERY

3.1. Définition

Le schéma de Formery servira de modèle aux variogrammes à tangente oblique à l'origine (avec ou sans effet de pépite) et à croissance ménagée, dont le palier est atteint par valeurs asymptotiques lentes. (cf. fig. IV-6 bis).

Son expression analytique est :

$$(IV, 25) \quad \gamma(h) = C \left[1 - e^{-h/a} \right]$$

et les fonctions $X(h)$ et $F(h)$ s'en déduisent immédiatement :

$$(IV, 26) \quad \begin{aligned} \frac{1}{C} X(h) &= 1 - \frac{a}{h} (1 - e^{-h/a}) \\ \frac{1}{C} F(h) &= 1 - \frac{2a}{h} \left[1 - \frac{a}{h} (1 - e^{-h/a}) \right] \end{aligned}$$

A plus d'une dimension, les résultats sont présentés dans le recueil d'abaques ci-dessous, classés dans le même ordre que le précédent, après avoir été calculés par analyse numérique.

3.2. Développements en séries exponentielles

Signalons toutefois un calcul formel des fonctions usuelles à deux dimensions, du schéma de Formery ; ce calcul a été établi par Ph. FORMERY et G. MATHERON, pour le covariogramme e^{-h} .

Si l'on appelle $K_\lambda(x)$ la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce, et :

$$(IV, 27) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_n(x) = \int_1^\infty e^{-vx} (v^2 - 1)^n dv \\ Q_n(x) = \int_1^\infty e^{-vx} (v^2 - 1)^n \frac{dv}{v} \\ R_n(x) = \int_1^\infty e^{-vx} (v^2 - 1)^n \frac{dv}{v^2} \end{array} \right.$$

$$(IV, 28) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = -x K'_0(x) \\ f_1(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du = \frac{1}{x} \int_0^x K_0(u) du - K_0(x) \\ f_2(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x u f_1(u) du = \frac{2}{x} \int_0^x K_0(u) du - \frac{4}{x^2} \int_0^x u K_0(u) du \end{array} \right.$$

$$(IV, 29) \left\{ \begin{aligned} g(x) &= (1+x) e^{-x} \\ g_1(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x g(u) du = \frac{2 - (2+x) e^{-x}}{x} \\ g_2(x) &= \frac{2}{x^2} \int_0^x u g_1(u) du = \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} \left[3 - (3+x) e^{-x} \right] \end{aligned} \right.$$

Il vient ($\ell \leq h$) :

$$(IV, 30) \left\{ \begin{aligned} \gamma(\ell; h) &= \frac{2}{h} f(\ell) - \frac{2}{h^2} g(\ell) + 2 \frac{e^{-h}}{h^2} - \frac{4}{h^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{\ell}{2}\right)^{2n+2} R_n(h) \\ X(\ell; h) &= \frac{2}{h} f_1(\ell) - \frac{2}{h^2} g_1(\ell) + 2 \frac{e^{-h}}{h^2} - \frac{4}{h^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)n!(n+1)!} \left(\frac{\ell}{2}\right)^{2n+2} R_n(h) \\ F(\ell, h) &= \frac{2}{h} f_2(\ell) - \frac{2}{h^2} g_2(\ell) + 2 \frac{e^{-h}}{h^2} - \frac{4}{h^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)n!(n+2)!} \left(\frac{\ell}{2}\right)^{2n+2} R_n(h) \\ H(\ell, h) &= \frac{f_1(\ell)}{h} - \frac{e^{-h}}{h} + \frac{2}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)n!(n+1)!} \left(\frac{\ell}{2}\right)^{2n+2} Q_n(h) \end{aligned} \right.$$

et pour $\ell \geq h$:

$$(IV, 31) \left\{ \begin{aligned} X(\ell; h) &= \frac{1}{\ell} f_2(h) - \frac{e^{-\ell}}{\ell} + \frac{2}{\ell} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)n!(n+2)!} \left(\frac{h}{2}\right)^{2n+2} Q_n(\ell) \\ \gamma(\ell; h) &= e^{-\ell} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)n!(n+2)!} \left(\frac{h}{2}\right)^{2n+2} P_n(\ell) \end{aligned} \right.$$

quant à $F(\ell, h)$ et $H(\ell, h)$, ce sont des fonctions symétriques en ℓ et h .

On pourra calculer les fonctions auxiliaires P , Q , R , f , f_1 et f_2 , en remarquant que

$$(IV, 32) \quad \left[\begin{array}{ll} Q_n(x) = \frac{x}{2n} P_n(x) - Q_{n-1}(x) & n \geq 1 \\ R_n(x) = P_{n-1}(x) - R_{n-1}(x) & n \geq 1 \\ \frac{x^2}{n} P_n(x) = 2(2n-1) P_{n-1}(x) + 4(n-1) P_{n-2}(x) & n \geq 2 \end{array} \right.$$

avec comme premiers termes :

$$(IV, 33) \quad \left[\begin{array}{ll} P_0(x) = \frac{e^{-x}}{x} & P_1(x) = \frac{2e^{-x}}{x^3} (1+x) \\ Q_0(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-vx}}{v} dv = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!} x^n (0,57722 \dots \log x) \\ R_0(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-vx}}{v^2} dv = e^{-x} - x Q_0(x) \end{array} \right.$$

Enfin, les fonctions f , f_1 et f_2 peuvent se calculer par dérivation ou intégration effectuées sur le développement de $K_0(x)$

$$(IV, 34) \quad K_0(x) = - (0,577216 + \log \frac{x}{2}) \sum_{k=0}^\infty \frac{(\frac{x}{2})^{2k}}{(k!)^2} + \sum_{k=1}^\infty \frac{(\frac{x}{2})^{2k}}{(k!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{k} \right)$$

On aura à intégrer des monômes du type $(\frac{x}{2}) \log(\frac{x}{2})$:

$$\int_0^x \left(\frac{u}{2}\right)^\lambda \log\left(\frac{u}{2}\right) du = \frac{2}{\lambda+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+1} \left[\log\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\lambda+1} \right]$$

3.3. Abaques

Fig. 15 - Schéma de Fenners

Variation des la mètre carré



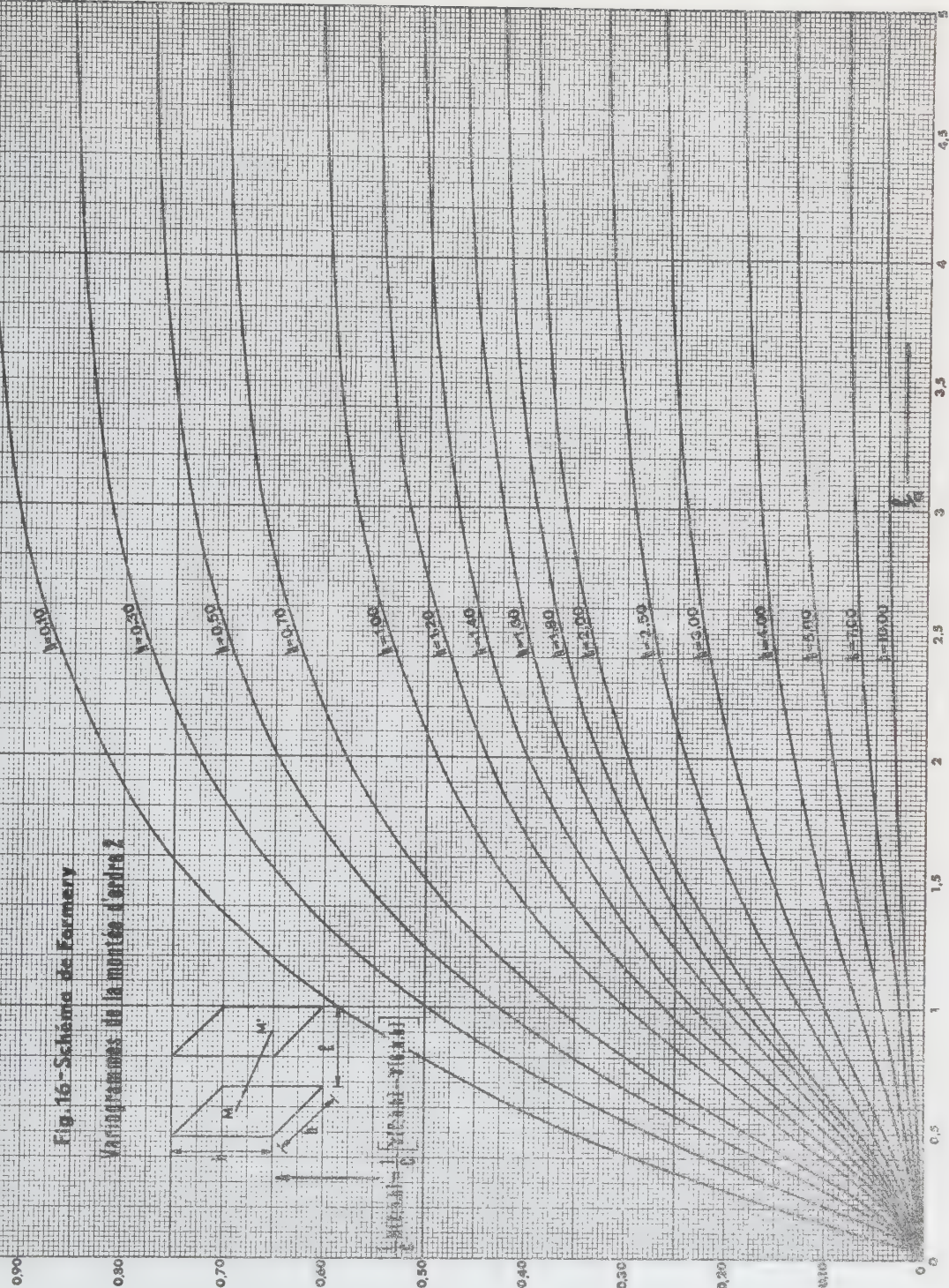
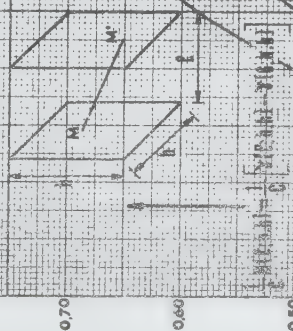
100

100

$\lambda = 0.50$
 $\lambda = 1.00$
 $\lambda = 1.50$
 $\lambda = 2.00$
 $\lambda = 2.50$
 $\lambda = 3.00$
 $\lambda = 3.50$
 $\lambda = 4.00$
 $\lambda = 4.50$
 $\lambda = 5.00$
 $\lambda = 5.50$
 $\lambda = 6.00$
 $\lambda = 6.50$
 $\lambda = 7.00$
 $\lambda = 7.50$
 $\lambda = 8.00$
 $\lambda = 8.50$
 $\lambda = 9.00$
 $\lambda = 9.50$
 $\lambda = 10.00$

Fig. 16 - Schéma de Formery

Variogrammes de la montée d'ordre 2





Fonction $\frac{1}{l} F\left(\frac{p}{l}, \frac{b}{l}\right)$ = Variance d'un point dans le rectangle $l=b$.

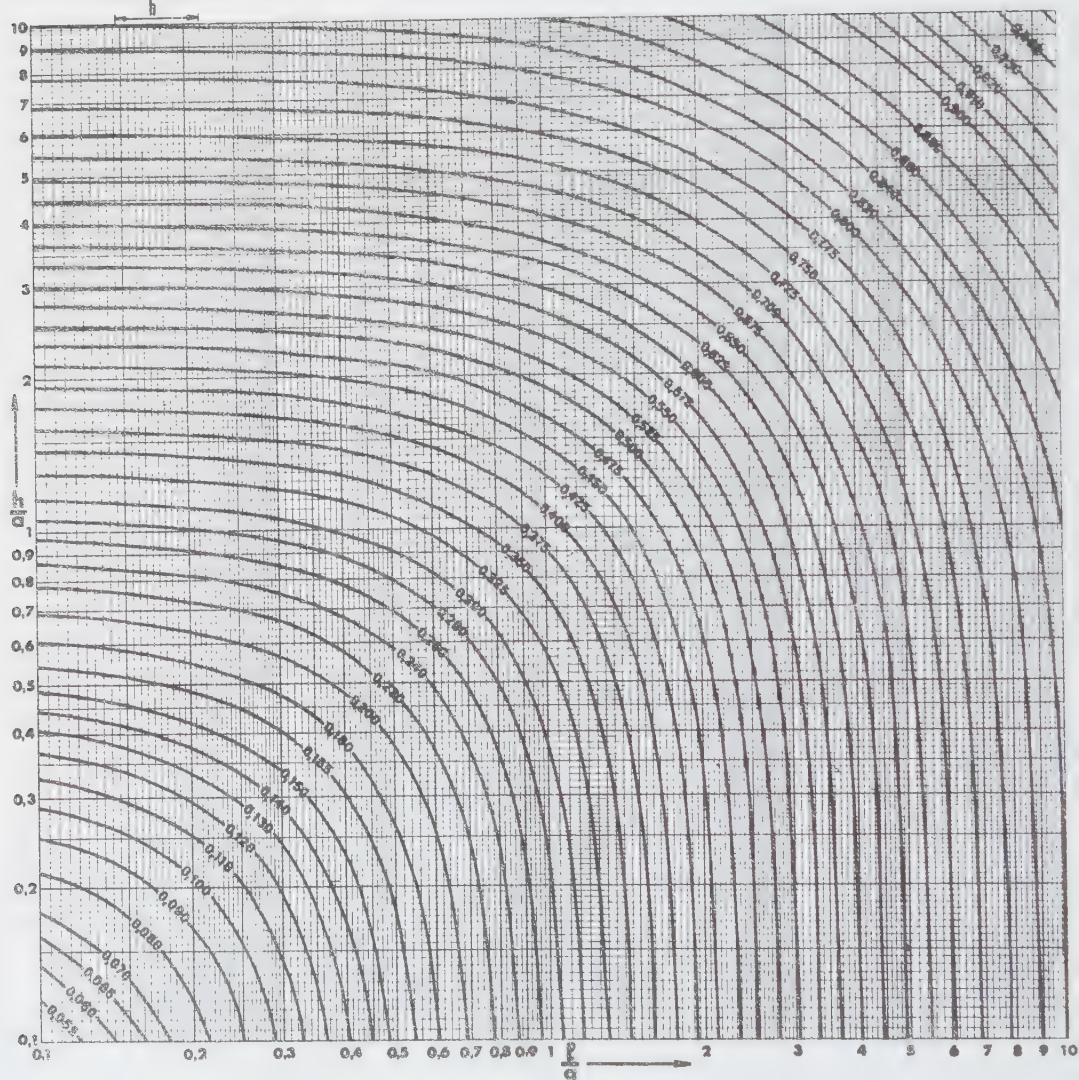
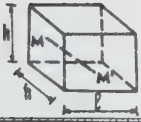


Fig.17-Schéma de Formery



Fonction $\frac{1}{6} F(\frac{l}{a}, \frac{h}{a}, \frac{b}{a})$ — Variance d'un point dans le parallépipède $l \times h \times b$.

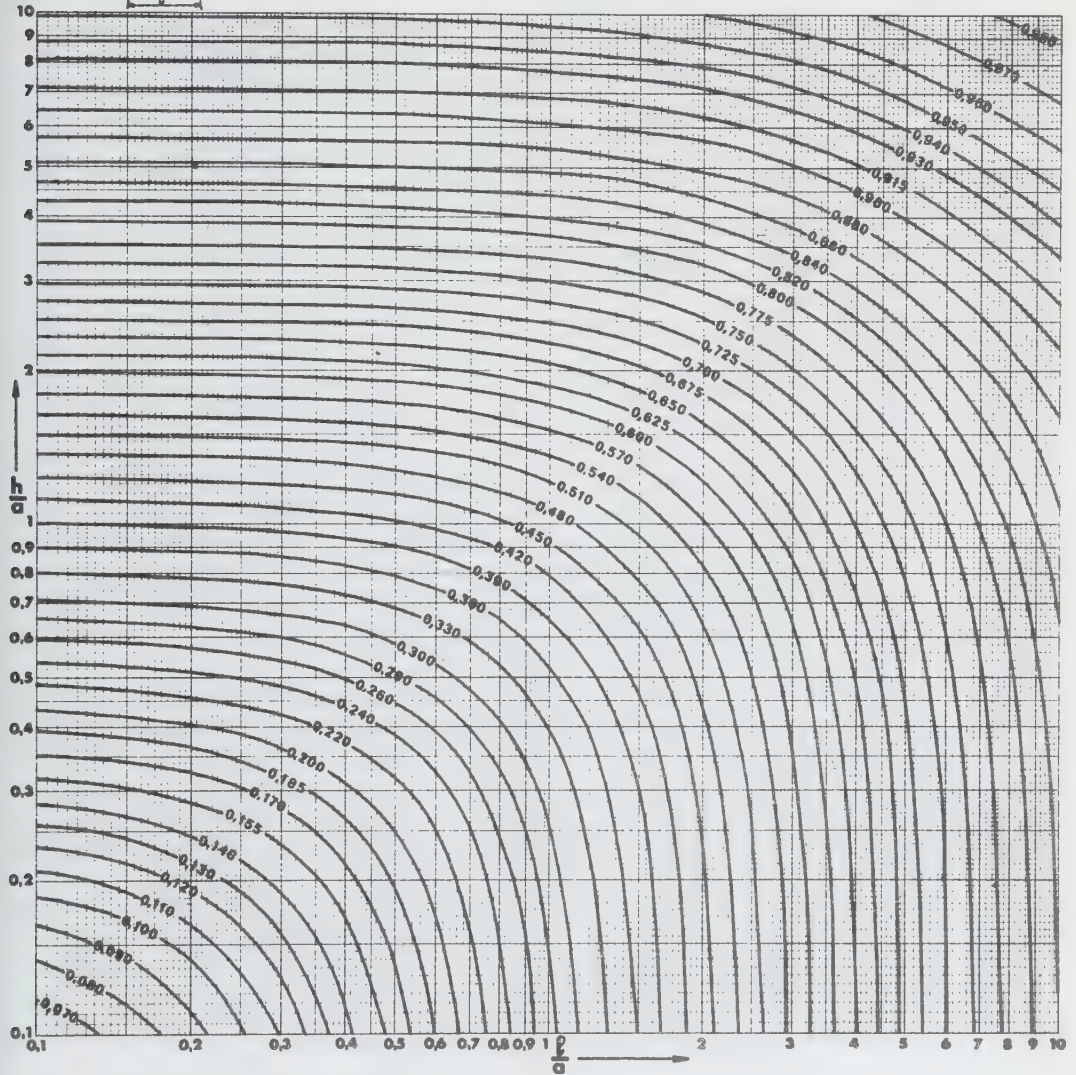


Fig.18—Schéma de Formery

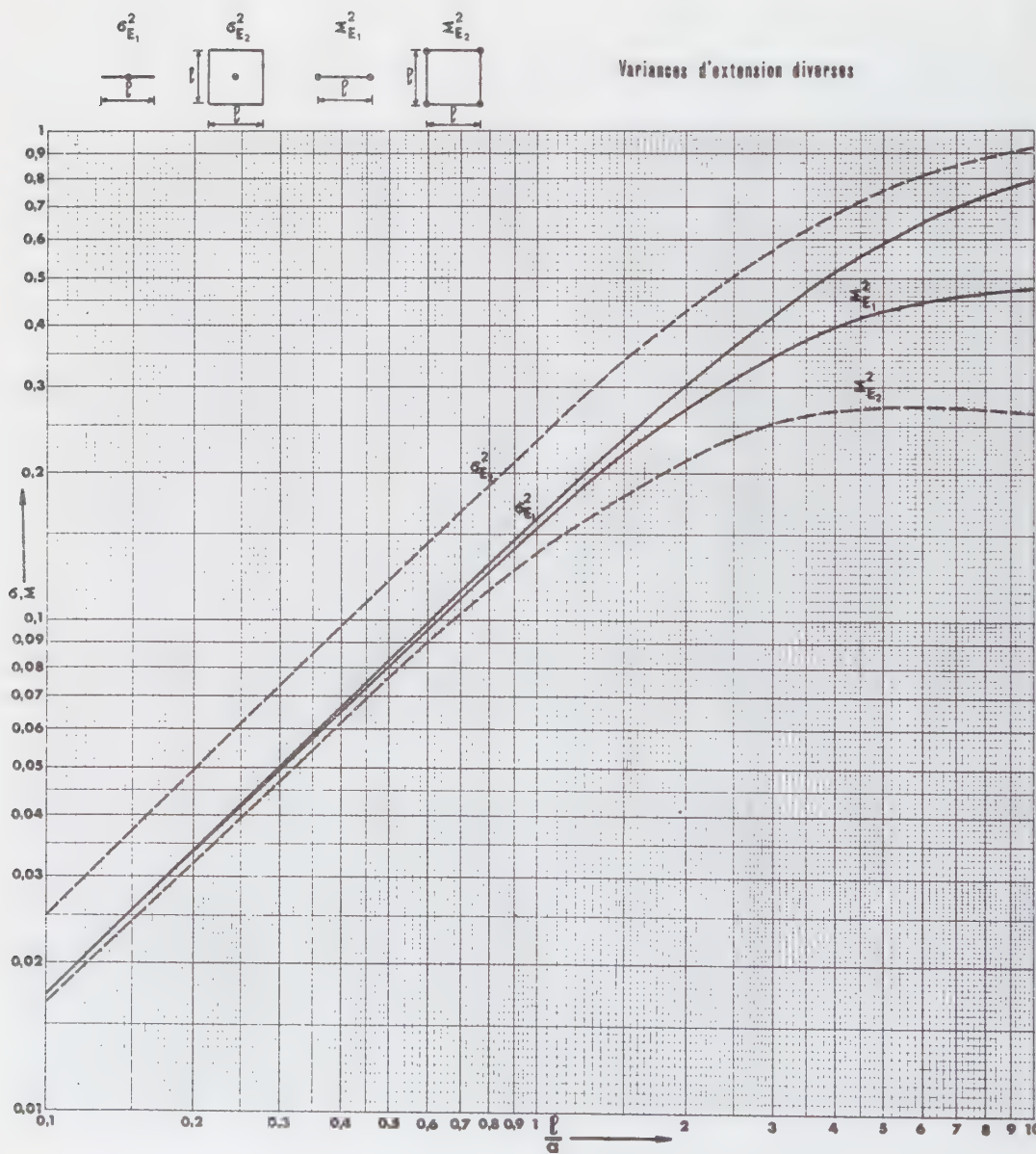


Fig.19-Schéma de Formery



Variance d'extension du traçage médian h dans le rectangle $l \times h$

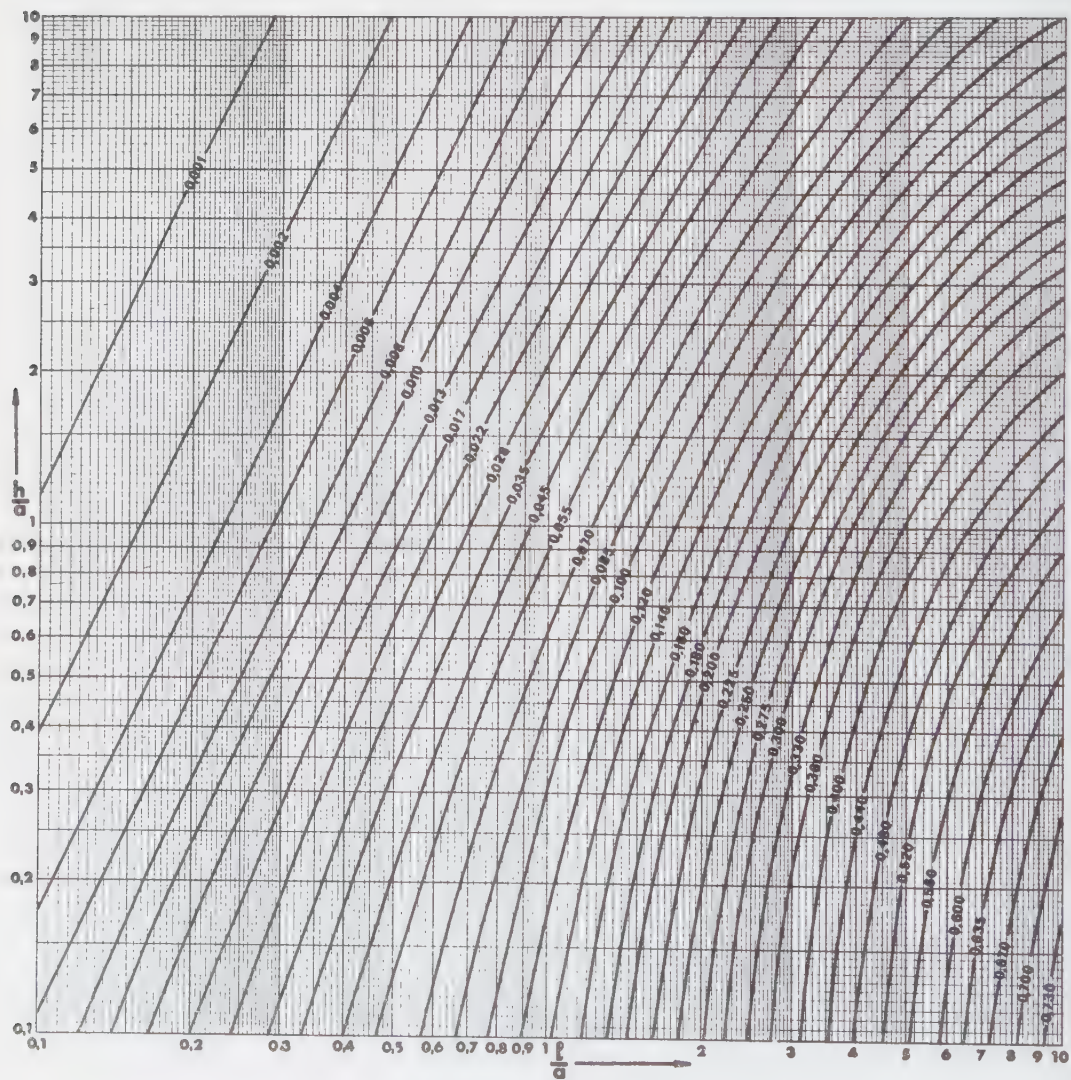
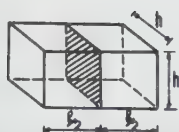


Fig.21-Schéma de Formery



Variance d'extension de la section médiane $h \times h$ dans le parallélépipède $2h \times h \times h$

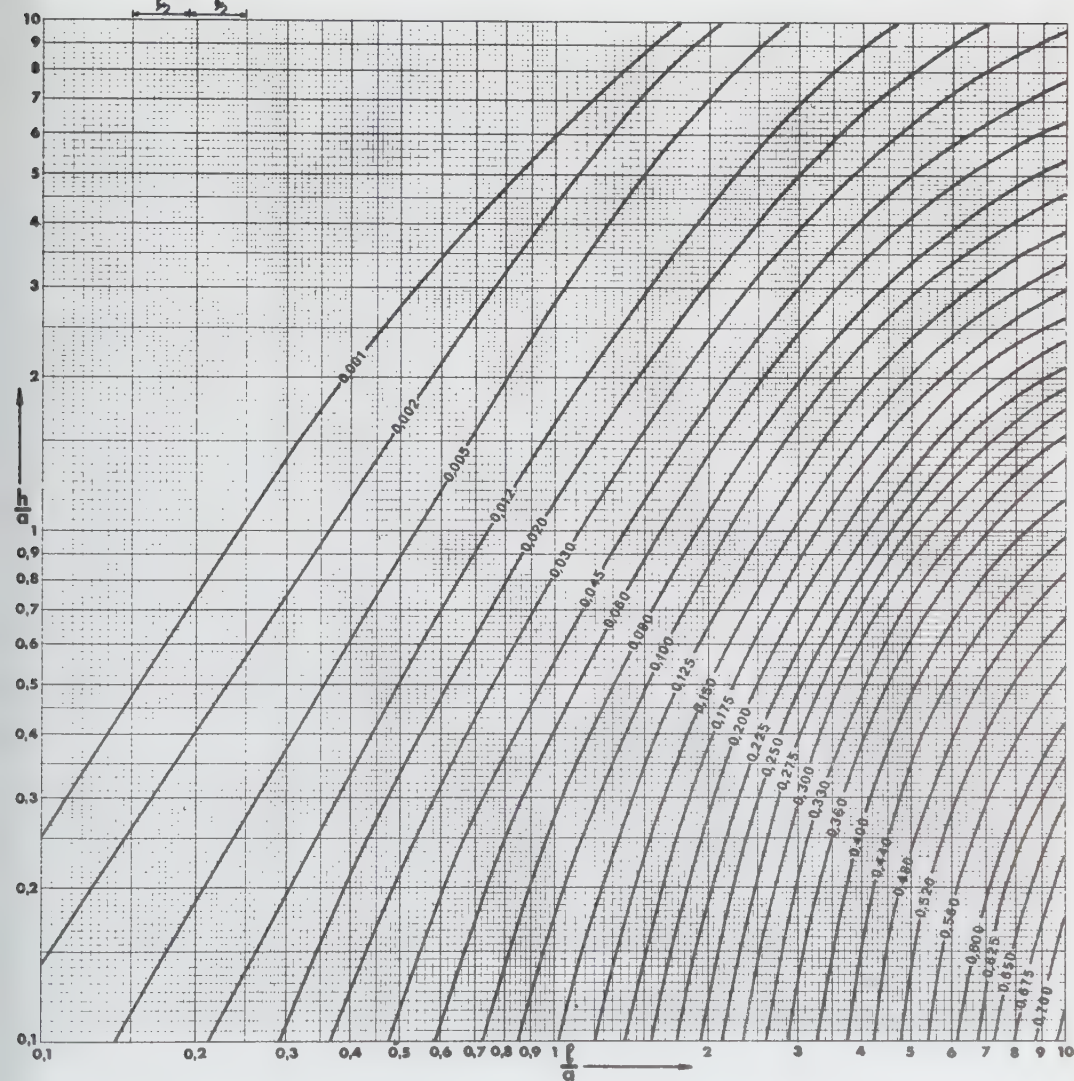


Fig.22-Schéma de Formery

4. SCHEMA GAUSSIEN

Avec le schéma gaussien, nous rencontrons la première représentation théorique qui accorde au variogramme ponctuel une tangente horizontale à l'origine.

On pourrait penser que la croissance d'un tel schéma est très lente, on voit en fait sur la figure (IV, 23) qu'elle est vite ascendante et simultanément converge rapidement. Pour éviter les confusions de notations, on changera, dans l'expression classique (IV, 35) de la loi normale centrée :

$$\text{IV, 35)} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

la notation de la variance σ^2 par a^2 . Cette "variance" n'a plus rien à voir ici avec la variance à priori de la transition, qui apparaîtra dans $f(x)$ de (IV, 35) comme un facteur de proportionnalité. Il faut, pour se replacer dans le contexte géostatistique, considérer la signification purement analytique de a , à savoir l'abscisse du point d'inflexion de l'exponentielle de Gauss centrée, ou en quelque sorte l'équivalent de la portée. On écrira le schéma gaussien de la façon suivante :

$$\text{IV, 36)} \quad \gamma(r) = C \left[1 - e^{-\frac{r^2}{2a^2}} \right]$$

Fonctions F, X et H en schéma gaussien

Une propriété remarquable, particulière au schéma gaussien, simplifie considérablement le calcul des fonctions F, X et H et le ramène à une dimension seulement, ce qui permet d'éviter tout un paquet d'abaques.

Fig.2.3-Fonction intrinsèque du schéma Gaussien

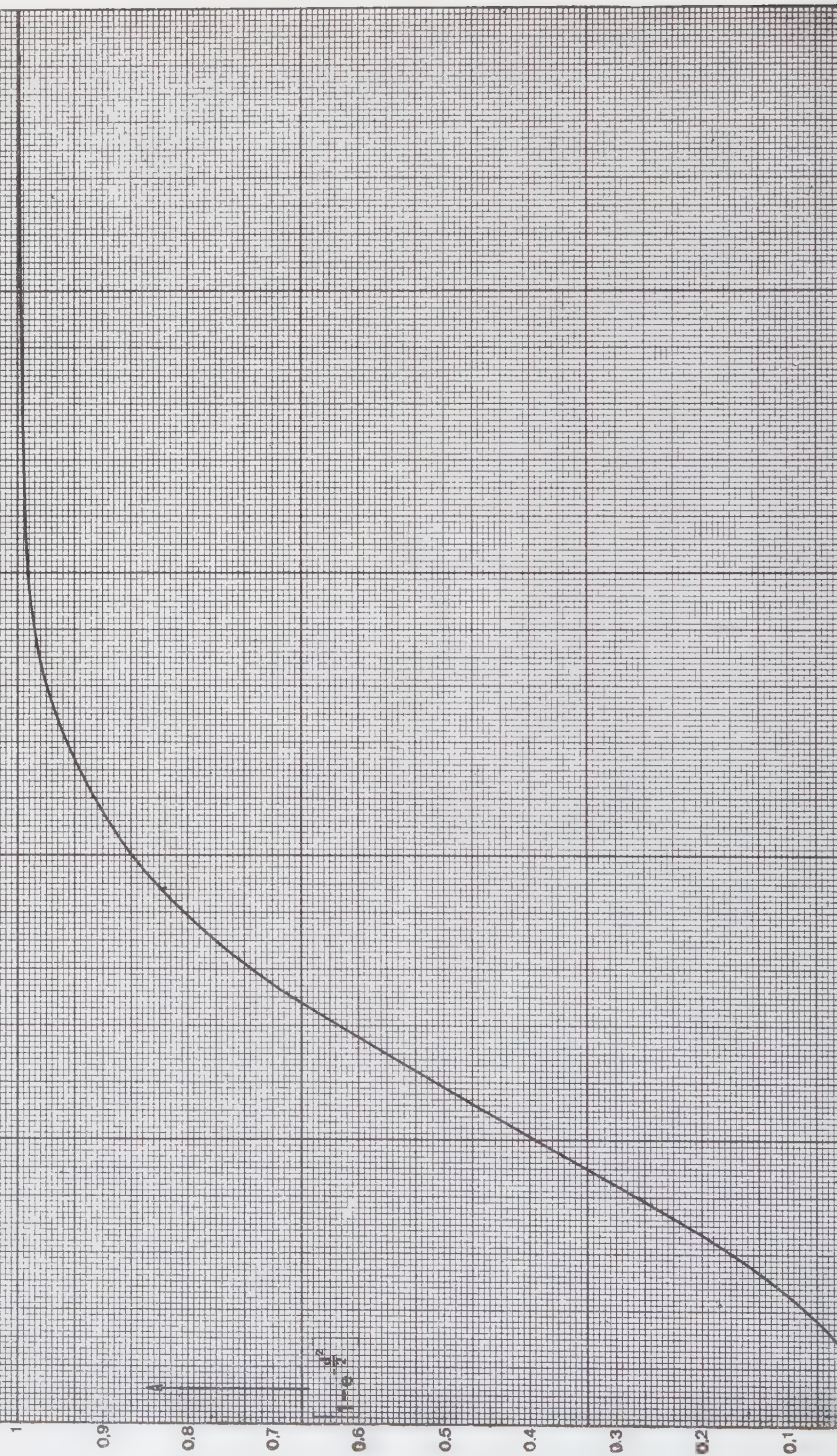
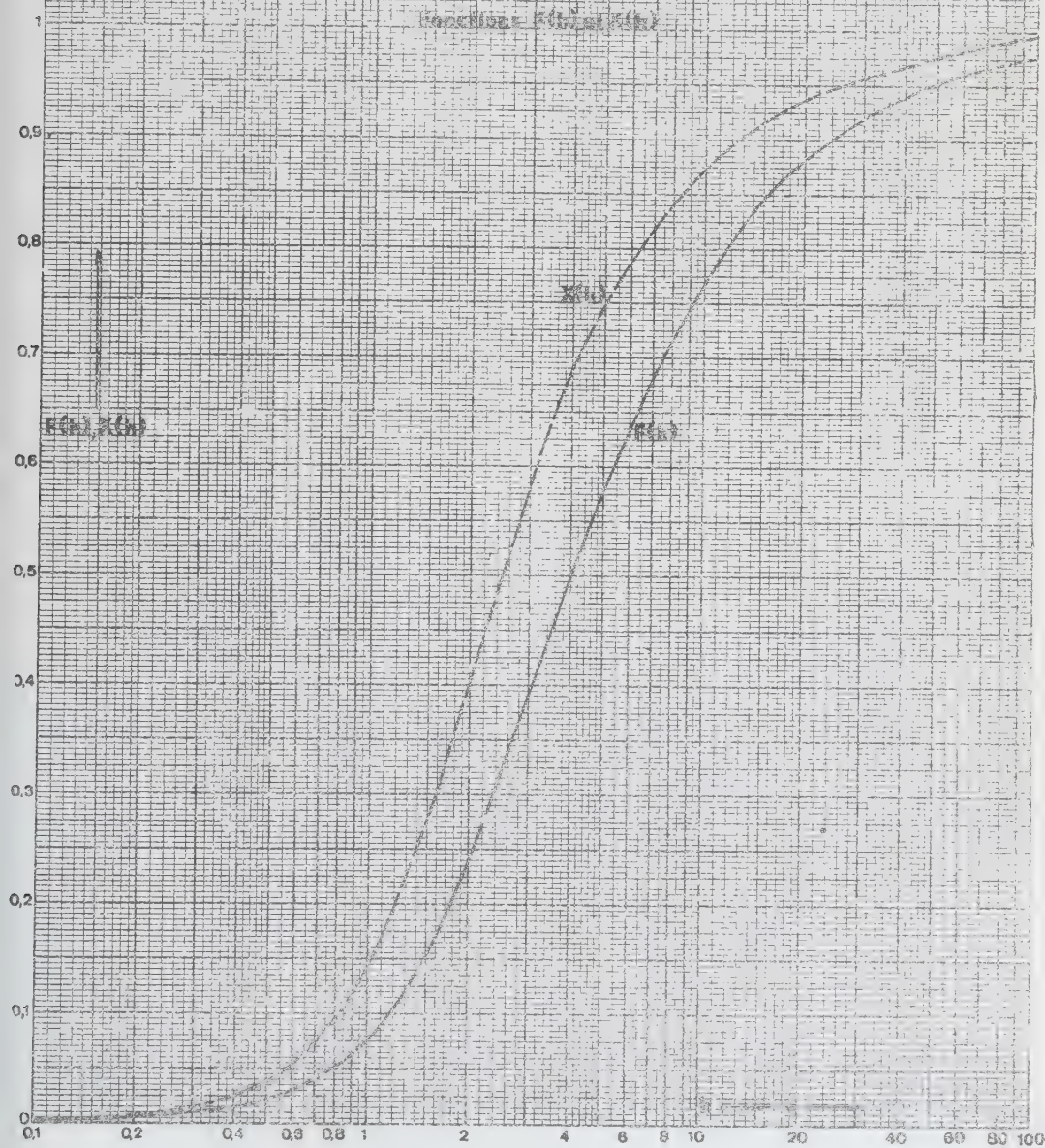


Fig. 24. Scherer's Correlation

$$\ln \frac{X(t)}{X(\infty)} = -K t^n$$



Raisonnons directement sur l'expression $e^{-\frac{r^2}{2a^2}}$ dont on appellera F' , H' et X' les fonctions auxiliaires, il suffira de multiplier par C le complément à 1 de ces fonctions pour avoir F , X et H .

On voit immédiatement que la montée d'ordre 1 de (IV, 36) (1er algorithme IV, 2)

$$M(\ell; h) = C(1 - e^{-\ell^2 / 2a^2}) \left[\frac{2}{h^2} \int_0^h (h-x) e^{-x^2 / 2a^2} dx \right]$$

$$(IV, 37) \quad M(\ell; h) = C(1 - e^{-\ell^2 / 2a^2}) F'(h)$$

D'une manière générale, la montée d'ordre n s'écrit :

$$(VI, 38) \quad M(\ell; h_1, h_2 \dots h_n) = C(1 - e^{-\ell^2 / 2a^2}) F'(h_1) \cdot F'(h_2) \dots F'(h_n)$$

La fonction $F'(h)$ à une dimension est par définition :

$$(VI, 39) \quad F'(h) = \frac{2}{h^2} \int_0^h (h-x) e^{-x^2 / 2a^2} dx$$

A n dimensions, l'intégrale multiple se décompose en n intégrales simples et il vient :

$$(IV, 40) \quad F'(h_1, h_2 \dots h_n) = F'(h_1) \cdot F'(h_2) \dots F'(h_n)$$

La fonction $X'(h)$ de définition :

$$(IV, 41) \quad X'(h) = \frac{1}{h} \int_0^h e^{-x^2/2a^2} dx$$

se généralise à son tour immédiatement. A deux dimensions (covariance du rectangle ℓ, h , avec son côté h) :

$$(IV, 42) \quad X'(\ell; h) = F'(h) \cdot X'(\ell)$$

A trois dimensions, la covariance du parallélépipède ℓ, h, h' avec sa face h, h' , s'écrit :

$$(IV, 43) \quad X'(\ell; h; h') = F'(h) \cdot F'(h') \cdot X'(\ell)$$

La fonction $H'(\ell, h)$ ou covariance des deux côtés perpendiculaires du rectangle ℓ, h , est aussi simple :

$$(IV, 44) \quad H'(\ell; h) = X'(\ell) \cdot X'(h)$$

Quant à son homologue à trois dimensions $H'(h, h', \ell)$ (covariance des deux faces perpendiculaires passant par ℓ) c'est :

$$(IV, 45) \quad H'(h, h', \ell) = X'(h) \cdot X'(h') \cdot F'(\ell)$$

(le produit $X'(h) \cdot X'(h') \cdot X'(\ell)$ représenterait la covariance du parallélépipède avec chacun de ses sommets).

En définitive, toutes les variances et covariances possibles se ramènent aux produits des deux fonctions F' et X' ; la décomposition des intégrales d'ordre n en intégrales simples qui a permis ce résultat remarquable est appelée effet rectangulaire (G. MATHERON, les variables régionalisées, ch. 2). Elle n'existe à l'état pur et isotrope que dans le schéma gaussien.

Calcul numérique des variances et variances d'extension

Les variances d'extension usuelles se calculeront à partir des formules (IV, 4), (IV, 5), (IV, 6), (IV, 7) qui les définissent, par application des relations (IV, 37 à IV, 45). Il est inutile de faire une tabulation spéciale de ces quelques sommes et produits des fonctions $F'(h)$ et $X'(h)$. Il est par contre indispensable de pouvoir lire, graphiquement ou numériquement, les valeurs de ces deux dernières expressions. $X'(h)$ n'est autre que la moyenne de l'intégrale de l'exponentielle de Gauss, ou de la loi de Galton, prise entre 0 et h ; quant à $F'(h)$, il s'écrit :

(IV 46)

$$\left\{ \begin{array}{l} F'(h) = \frac{2}{h^2} \left[h^2 X'(h) + e^{-h^2/2} - 1 \right] \\ \text{avec} \\ X'(h) = \frac{1}{h} \int_0^h e^{-x^2/2} dx \end{array} \right.$$

Les tables usuelles de la loi normale fournissent en fait :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (\text{densité de probabilité})$$

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2} dx \quad (\text{loi de Galton})$$

pour éviter au lecteur ces changements de coordonnées, on a reporté directement sur les tables et abaques (fig. IV - 24) :

$$\frac{1}{C} F(h) = \frac{1}{C} \left[1 - F'(h) \right]$$

$$\frac{1}{C} X(h) = \frac{1}{C} \left[1 - X'(h) \right]$$

Les montées éventuelles se déterminent directement sur le $\gamma(h)$ unitaire de la figure 23 par les affinités d'axe Oy convenables compte tenu de (IV, 37 et (IV, 38).

5. LE SCHEMA LINEAIRE

A vrai dire, le schéma linéaire ne fait pas partie des schémas de transition puisque sa variance à priori est infinie. Il apparaît néanmoins comme le cas limite de tous les schémas géostatistiques à tangente oblique à l'origine. Lorsqu'on aura à déterminer la variance d'un volume v dans un champ V , ou la variance d'extension de son réseau de sondages au volume v , dans des configurations telles que la plus grande distance qui intervient soit plus petite que la portée, l'assimilation au schéma linéaire risque d'apporter des simplifications intéressantes. On voit en particulier sur la figure (IV-6 b) que les variogrammes des schémas de Matheron circulaires et sphériques sont pratiquement linéaires jusqu'aux deux tiers de leurs portées.

5.1. Montée d'ordre 1, fonctions $F(\ell, h)$; $X(\ell, h)$; $H(\ell, h)$

Soit la fonction intrinsèque $\gamma(r) = p \cdot r$; à une dimension, les fonctions $F(h)$ et $X(h)$ correspondantes sont les suivantes :

$$\begin{cases} X(h) = \frac{1}{2} p \cdot h \\ F(h) = \frac{1}{3} p \cdot h \end{cases}$$

les variances d'extension $\sigma_{E_1}^2$ et $\sum_{E_1}^2$ du segment de longueur h reconnu, soit par le point central, soit $\sigma_{E_1}^2$ par les deux extrémités, sont les mêmes (cf. exercice A) et valent :

$$(IV, 4) \quad \sigma_{E_1}^2 = \sum_{E_1}^2 = \frac{1}{6} p \cdot h$$

A deux dimensions, les formules sont un peu moins simples. Le variogramme de montée sous la puissance h devient :

$$(IV, 48) \quad \begin{aligned} M(\ell; h) &= \gamma(\ell; h) - \gamma(0; h) \\ &= p \left[\sqrt{\ell^2 + h^2} + \frac{\ell^2}{h} \log \frac{h + \sqrt{\ell^2 + h^2}}{\ell} - \frac{2(\ell^2 + h^2)^{3/2}}{3h^2} - \ell^3 - \frac{1}{3} \right] \end{aligned}$$

la fonction $X(\ell; h)$ covariance du rectangle avec son côté h s'écrit :

$$(IV, 49) \quad \begin{aligned} X(\ell; h) &= p \left[\sqrt{\ell^2 + h^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \frac{\ell^2}{h^2} \right) + \frac{1}{12} \frac{h^2}{\ell} \log \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + h^2}}{h} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \frac{\ell^2}{h} \log \frac{h + \sqrt{\ell^2 + h^2}}{\ell} + \frac{1}{6} \frac{\ell^2}{h^2} \right] \end{aligned}$$

la fonction $F(\ell, h)$ prend pour expression :

$$(IV, 50) \quad \begin{aligned} F(\ell, h) &= p \left[\sqrt{\ell^2 + h^2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{15} \frac{\ell^2}{h^2} - \frac{1}{15} \frac{h^2}{\ell^2} \right) + \frac{1}{15} \left(\frac{\ell^3}{h^2} + \frac{h^3}{\ell^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \frac{\ell^2}{h} \log \frac{h + \sqrt{\ell^2 + h^2}}{\ell} + \frac{1}{6} \frac{h^2}{\ell} \log \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + h^2}}{h} \right] \end{aligned}$$

et la fonction $H(\ell, h)$:

$$(IV, 51) \quad H(\ell, h) = \frac{1}{6} p \left[\sqrt{\ell^2 + h^2} + \frac{h^2}{\ell} \log \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + h^2}}{h} + \frac{\ell^2}{h} \log \left(\frac{h + \sqrt{\ell^2 + h^2}}{\ell} \right) \right]$$

Mentionnons le cas particulier du carré où $\ell = h = b$; $X(b, b)$;
 $F(b, b)$ et $H(b, b)$ deviennent alors :

$$(IV, 52) \quad \begin{cases} X(b, b) = 0,7351 \cdot p \cdot b \\ F(b, b) = 0,5213 \cdot p \cdot b \\ H(b, b) = 0,7652 \cdot p \cdot b \end{cases}$$

5.2. Variance de v dans V , homothétique entre eux

Pour établir les expressions précédentes, il n'a pas été utilisé de propriétés particulières de la fonction linéaire, mais uniquement les algorithmes généraux appliqués à $\gamma(r) = p \cdot r$. Toutes ces manipulations aboutissent à des valeurs moyennes et conservent les dimensions du $\gamma(r)$; on peut constater que F , X et H , M de (IV, 48 à IV, 52) sont proportionnels à une longueur. Nous allons maintenant exploiter cette propriété pour exprimer la variance du volume v dans le volume V qui lui est homothétique, puis pour calculer les formules des triangles (variances et variances d'extension).

Si v et V sont homothétique, on a :

$$\frac{v}{V} = \lambda^n$$

Dans la deuxième intégrale de la formule générale (II, 34) de définition de la variance de v dans V , effectuons le changement de variable $x = \lambda y$;
 $x' = \lambda' y'$ ($dx = \lambda^n dy$; $dx' = \lambda'^n dy'$). Il vient :

$$\sigma^2(v/V) = (1 - \lambda) \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x - x') dx dx'$$

Désignons par $\sigma^2(0/V)$ la variance dans V de la variable ponctuelle.

On a ainsi :

$$\sigma^2(v/V) = \left[1 - \left(\frac{v}{V} \right)^{\frac{1}{n}} \right] \sigma^2(0/V)$$

La connaissance de la variance de la variable ponctuelle dans le volume V , permet de déterminer toutes les variances dans V des volumes v qui lui sont homothétiques.

5.3. Formules du triangle

Plaçons-nous en schéma linéaire $\gamma(r) = p \cdot r$, dans l'espace à deux dimensions et considérons deux figures quelconques F_1 et F_2 .

Soit $\varphi(\alpha, \beta, \gamma \dots)$ l'expression de la covariance de ces deux figures. φ est exprimé à l'aide des longueurs α, β, γ et de paramètres sans dimensions. Si l'on modifie l'ensemble de la figure $F_1 + F_2$ dans une similitude infinitésimale de module $1 + d\lambda$,

$$\text{CoV } F_1/F_2 = \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha \varphi\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}, \dots\right)$$

vérifie alors la relation :

$$(IV, 53) \quad \frac{d(\text{CoV } F_1/F_2)}{\text{CoV } F_1/F_2} = \frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{d\beta}{\beta} = d\lambda$$

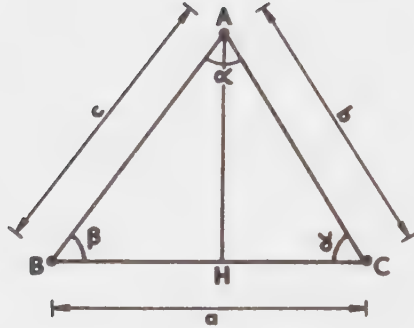


Figure 25

Considérons maintenant le triangle T, de sommets A B C (figure 25) tel que le plus grand de ces côtés soit inférieur à la portée. On se propose d'exprimer la variance de ce triangle, qui est une intégrale quadruple, à l'aide d'expressions plus simples. Appelons :

V = variance du triangle

g = covariance de a avec le triangle

S = surface du triangle

a, b, c, = côtés du triangle.

Effectuons une similitude élémentaire de centre A, on peut écrire :

$$(S + dS)^2 (V + dV) = S^2 V + 2 S dS g$$

L'égalité (IV, 54) est une simple propriété de sommation des champs d'intégration et reste vérifiée pour tous les schémas intrinsèques, par contre la propriété (IV, 53) du schéma linéaire, appliquée à (IV, 54) entraîne :

$$\text{CoV } a/T = \frac{5}{4} V$$

Effectuons maintenant une similitude infinitésimale de centre B :

$$(IV, 55) \quad (a + da) (S + dS) (g + dg) = a Sg + a dS \text{ CoV } a/b + S da \text{ CoV } C/T$$

Comme précédemment (IV, 55) et (IV, 53) entraînent :

$$(IV, 56) \quad 4 g = 2 \text{ CoV } a/b + \text{CoV } C/T$$

De même, une similitude de centre C entraîne :

$$(IV, 57) \quad 3 \text{ CoV } a/b = \text{CoV } A/a + \text{CoV } B/b$$

$$(IV, 58) \text{ et } 3 \text{ CoV } C/T = 2 \text{ CoV } C/c$$

Les expressions (IV, 54) ; (IV, 56) ; (IV, 58) permettent de proche le calcul de la variance du triangle, à l'aide des covariances entre sommets et côtés opposés qui sont des intégrales simples, et l'on a :

$$(IV, 59) \quad V = \frac{2}{15} \left[\text{cov } \frac{A}{a} + \text{cov } \frac{B}{b} + \text{cov } \frac{C}{c} \right]$$

Une covariance telle que $\text{Cov } \frac{A}{a}$ se déduit de la covariance de A avec chacun des segments HB et HC déterminés sur le côté $a = BC$ par le pied de la hauteur AH (figure 25). En effet, on a :

$$(IV, 60) \quad \text{CoV } \frac{A}{a} = \frac{C}{a} \cos \beta \cdot \text{CoV } A/BH + \frac{b}{a} \cos \gamma \cdot \text{CoV } a/HC$$

la formule étant vraie algébriquement, donc valable dans tous les cas de figures.

Or :

$$\text{CoV } A/BH =$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{BH} \int_0^{BH} \sqrt{x^2 + AH^2} \, dx &= \frac{p}{2 \cdot BH} \left[x \cdot \sqrt{x^2 + AH^2} + AH^2 \log (x + \sqrt{x^2 + AH^2}) \right]_0^{BH} \\ &= p \cdot \frac{c}{2} \left[1 + \sin \beta \cdot \text{tg } \beta \log \left(\frac{1}{\text{tg } \beta} + \frac{1}{\sin \beta} \right) \right] \end{aligned}$$

de même :

$$\text{CoV } A/HC = p \cdot \frac{b}{2} \left[1 + \sin \gamma \text{tg } \gamma \log \left(\frac{1}{\sin \gamma} + \frac{1}{\text{tg } \gamma} \right) \right]$$

Symétrisons les notations en introduisant le diamètre du cercle circonscrit d :

$$d = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$(IV, 60) \text{ s'écrit : } \frac{1}{p} \cdot \text{CoV } \frac{A}{a} =$$

$$d \frac{\sin^2 \gamma}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta}{2} \left[\left(1 + \sin \beta \text{tg } \beta \log \left(\frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\text{tg } \beta} \right) \right) + \frac{\sin^2 \beta \cos \gamma}{\sin \alpha} \frac{1}{2} \right. \\ \left. \left[\left(1 + \sin \gamma \text{tg } \gamma \log \frac{1}{\sin \gamma} + \frac{1}{\text{tg } \gamma} \right) \right] \right]$$

et la variance d'un point dans le triangle :

$$(IV, 61) \quad \left[\frac{V}{p} = \frac{d}{15} \left\{ \frac{1}{\sin \alpha} \left[\sin^2 \beta \cos \gamma + \sin^2 \gamma \cos \beta + \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \log \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{1}{\sin \beta} \right) \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} + \frac{1}{\sin \gamma} \right) \right] \right. \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin \beta} \left[\sin^2 \gamma \cos \alpha + \sin^2 \alpha \cos \gamma + \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha \log \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} + \frac{1}{\sin \gamma} \right) \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} \right) \right] \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\sin \gamma} \left[\sin^2 \alpha \cos \beta + \sin^2 \beta \cos \alpha + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \log \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} \right) \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{1}{\sin \beta} \right) \right] \right\} \right]$$

L'expression (IV, 61) présentée sous sa forme littérale n'est pas simple ; en pratique, on la lira à partir de l'abaque triangulaire (figure 26) qui l'exprime pour $d = 1$, et la pente p du demi-variogramme égale aussi à l'unité.

Explicitons un cas particulier qu'on aura à utiliser du krigeage, celui du triangle rectangle. Soient h et ℓ les deux côtés de l'angle droit et D l'hypothénuse, il vient :

$$(IV, 62) \quad V = p \frac{1}{15} \left[\frac{h^3 + \ell^3 + 2D^3}{D^2} + \frac{\ell^2 h^2}{D^3} \left(\log \frac{h+D}{\ell} + \log \frac{\ell+D}{h} \right) + \frac{1}{h\ell} \left(\ell^3 \log \frac{h+D}{\ell} + h^3 \log \frac{\ell+D}{h} \right) \right] + 2D$$

Il devient aisé de calculer la variance d'extension d'un triangle quelconque reconnu par trois sondages implantés à ses sommets (découpage d'un champ de sondages suivant des triangles). Compte tenu de (IV, 58) et (IV, 59) la formule de définition (II, 31) de la variance d'extension s'explique ainsi :

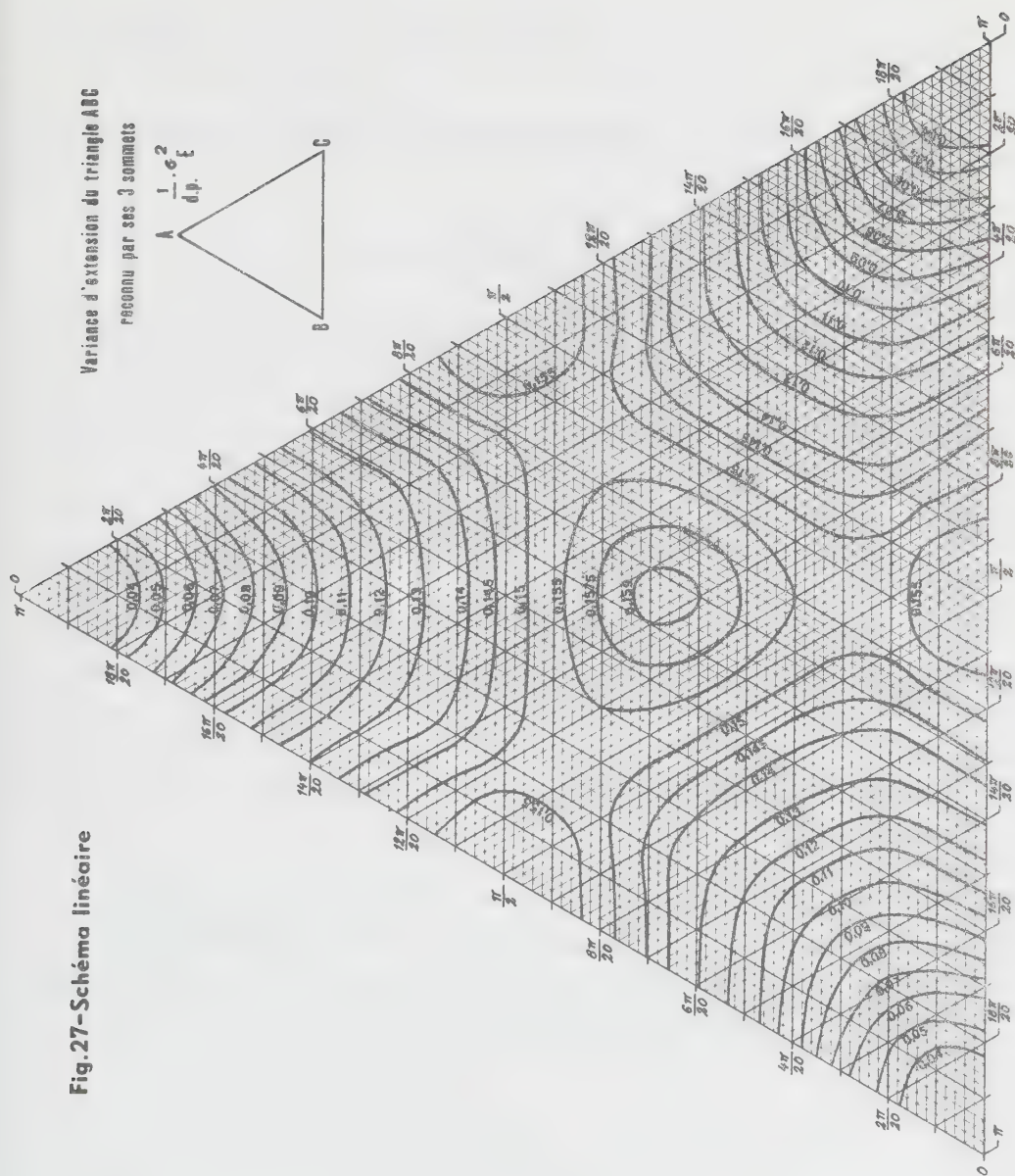
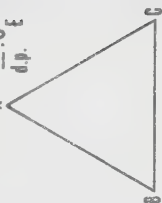
$$(IV, 63) \quad \sigma_E^2 = p \cdot d \left[\frac{7}{3} V - \frac{2}{9} (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) \right]$$

en prenant pour V l'expression (IV, 61).

Variances d'extension du triangle ABC

Reconnu par ses 3 sommets

$$A \sim \frac{1}{d.p.} \cdot 10^2$$



Cette variance d'extension a été tabulée et reportée sur l'abaque de la figure 27.

On trouvera un exemple d'utilisation de cet abaque à propos de l'exercice de krigeage E.

5.4. Equivalents linéaires en schéma linéaire

On appelle équivalent linéaire du rectangle (ℓ , h) ou du parallélépipède (ℓ , ℓ' , h) le segment de longueur λ de même variance que le rectangle ou le parallélépipède. Cette notion est bien commode eu regard à la simplicité des formules unidimensionnelles par rapport aux autres.

Lorsque $\gamma(r)$ change de définition au delà d'une portée finie a , et vaut alors une constante, la notion d'équivalent linéaire n'est pas applicable, mais en schéma linéaire, il est intéressant d'étudier si de façon exacte ou approchée, on arrive à ce genre d'équivalences. On pourrait procéder à l'aide de développements limités, mais le plus simple consiste à comparer, au vu des résultats numériques de la tabulation, les différences maximales des variances. L'aspect des abaques des figures 9 et 10 et la nature même du schéma linéaire suggèrent d'adopter comme équivalent linéaire la valeur de la diagonale du rectangle ou du parallélépipède.

Plaçons-nous dans les trois cas extrêmes d'anisotropie et déterminons la fonction F pour un segment, un carré et un cercle, ayant même diagonale (qui pour le segment devient la longueur). On utilisera pour ce faire la première

valeur tabulée dans le schéma de Matheron où $\ell = h = 0,10$, le $\gamma(h)$ est pratiquement linéaire et l'influence du terme en r^3 négligeable.

Pour le cube, il vient $D = \sqrt{3 \times 0,10^2}$ et $F(0,10 ; 0,10 ; 0,10) = 0,098 C$

pour le carré $D = \sqrt{2 \times 0,10^2}$ et $F(0,10 ; 0,10) = 0,094 C$

pour le segment $D = \sqrt{0,10^2}$ et $F(0,10) = 0,086 C$

Avec une précision inférieure ou égale à 12 %, on peut remplacer les parallélépipèdes rectangles par leurs diagonales principales et avec une précision inférieure ou égale à 8 %, les rectangles par leur diagonale.

6. SCHEMAS A EFFET DE TROU

6.1. Schéma de migration unidimensionnel

Si on a affaire à un effet de trou zonal à une dimension, dont le maximum dépasse le palier, on pourra prendre comme modèle de $\gamma(h)$ la fonction :

$$(IV, 64) \quad \gamma(h) = pq \left[1 - \frac{q}{q-p} e^{-\frac{h}{p}} - \frac{p}{p-q} e^{-\frac{h}{q}} \right] \quad \text{avec } p + q = 1$$

qui est la fonction intrinsèque du processus de migration décrit dans le texte du chapitre IV (par. 2).

Ce genre de schéma est immédiatement calculable à partir du schéma de Formery à une dimension, nous ne le développerons donc pas davantage.

6.2. Schémas de dilution avec effet de trou

Nous n'avons pas bâti de modèle pour les effets de trou isotropes à n dimensions, dont l'ordonnée du maximum dépasse largement celle du palier. Il reste néanmoins un cas où l'on peut, à partir des tabulations qui précèdent, tenir compte d'un effet de trou isotrope, lorsque la cause de l'effet de trou est à voir dans un processus de dilution. En pratique, on assimilera à cette famille les $\gamma(h)$ dont la maximum n'excède pas le palier de la transition.

Lorsqu'on pourra adopter comme germe de la dilution une couronne sphérique de rayons R et R' , le covariogramme transitif de cette figure s'exprimant sous forme de combinaison linéaire du covariogramme de la sphère, on sera ramené à une combinaison linéaire des schémas de Matheron ; il suffira alors d'appliquer cet opérateur linéaire, à partir des éléments tabulés dans les figures 7 à 14, au calcul de toute variance ou variance d'extension.

7. EXERCICE-TYPE C

Ajustement d'un variogramme expérimental à un modèle théorique

Au chapitre précédent a été explicitée en détail la construction d'un variogramme expérimental (III, 3.1.).

Reprenons cet exemple et poursuivons-le jusqu'au bout en ajustant maintenant les variogrammes obtenus à un schéma de Matheron.

Le double de la variance expérimentale des échantillons dans le champ

est $2 \cdot \sigma^{*2}(O/V) = 16,2 \text{ points}^2$. L'effet de pépité, mesuré directement vaut lui, $2 C_o = 4 \text{ points}^2$. Le champ est de 4 km dans la direction nord-sud et 1,2 km dans la direction perpendiculaire.

Pour le ramener à une transition simple et isotrope, il faut rectifier les données de base, les deux directions étudiées correspondent à des variabilités extrémales ; le rapport des pentes à l'origine des deux variogrammes est de 2,75. On multipliera par conséquent la dimension est-ouest du champ par 2,75 ; et l'on prendra pour variogramme du nouveau champ, rendu isotrope, celui de la direction nord-sud.

On se ramènera à une transition simple en supprimant l'effet de pépité ; le double de la nouvelle variance expérimentale devient alors :

$$2 \sigma^{*2}(O/V) - 2 C_o = 16,2 - 4 = 12,2 \text{ points}^2$$

En schéma de Matheron, l'intersection de la tangente à l'origine avec le palier C a pour abscisse les deux tiers de la portée a. Ici, l'intersection de cette tangente avec l'horizontale d'ordonnée $2 \sigma^2(O/V)$ a pour abscisse une valeur comprise entre 450 et 500 mètres.

Choisissons 450 m. La portée supposée est donc $a = \frac{3}{2} 450 = 600 \text{ m}$ les dimensions du champ rapportées à la portée valent

$$\frac{\ell}{a} = \frac{4000}{600} = 6,65$$

$$\frac{h}{a} = \frac{1200 \times 2,75}{600} = 5,50$$

La fonction $\frac{1}{C} F(\ell, h)$ de l'abaque de la figure 9 vaut donc :

$$\frac{1}{C} F(\ell, h) = 0,983 = \frac{1}{C} \sigma^2 (0/V)$$

d'où $2C = \frac{12,2}{0,983} = 12,4$

L'intersection de l'horizontale $2C + 2C_0 = 16,4$ avec la tangente à l'origine donne une portée $\frac{2}{3}a = 530$, au lieu de la valeur 450 dont nous étions partis.

Recommençons le calcul avec $\frac{2}{3}a = 550$ m,

il vient cette fois à $\frac{\ell}{a} = 4,85$

$$\frac{h}{a} = 4$$

$$\frac{1}{C} F(\ell, h) = 0,96 \quad \text{d'où } 2C + 2C_0 = 16,7$$

et $\frac{2}{3}a = 550$ m.

On retrouve la valeur de départ, qui est par conséquent la solution du système

$$(TV, 65) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2C}{3a} = 0,0231 & (\text{pente à l'origine}) \\ \frac{1}{C} F\left(\frac{h}{a}, \frac{\ell}{a}\right) = \sigma^2 (0/V) & (\text{variance dans le champ } V) \end{array} \right.$$

d'où l'ajustement au modèle.

Le système (IV, 65) est général pour tous les ajustements à des schémas de transition à tangente oblique à l'origine. Après s'être ramené à une transition simple et isotrope, on prendra comme données numériques de base la taille du champ (ici ℓ et h), l'estimateur de la variance expérimentale dans le champ (ici $\sigma^2(0/V)$) et celui de la pente à l'origine du variogramme (ici $\frac{2}{3} \frac{C}{a}$).

En schéma de Formery, comme en schéma de migration, les calculs se seraient conduits exactement de la même manière.

En schéma linéaire, il n'y a pas d'ajustement à faire, le seul paramètre p est déterminé à vue sur le variogramme. On peut, par contre, utiliser la méthode précédente pour tester la validité du schéma linéaire, et vérifier si la variance expérimentale dans le champ est bien celle du modèle. Si elle est sensiblement inférieure, c'est qu'en réalité la structure du champ relève d'un schéma de transition (dont on calculera alors la portée), qui n'a pas pu être mis en évidence parce que la mesure expérimentale du variogramme n'a pas été poussée assez loin.

En schéma gaussien, la première des deux équations du système (IV, 65) ne représente plus la pente à l'origine, qui est nulle : par contre $\frac{C}{a}$ est la pente du point d'inflexion, très facilement mesurable. Les calculs, à partir de cet estimateur, se poursuivent comme précédemment.

ETUDES PRATIQUES

CHAPITRE VI

L'EFFET DE PEPITE ET L'ECHANTILLONNAGE DES REGIONALISATIONS

- 1 - Règles d'échantillonnage des minerais lorrains en place
- 2 - Variances d'échantillonnage des minerais en place
- 3 - Exercice-type D
Exemple d'application des règles d'échantillonnage
- 4 - Norme d'échantillonnage des minerais lorrains.

CHAPITRE VI

L'EFFET DE PEPITE ET L'ECHANTILLONNAGE DES REGIONALISATIONS

1. REGLES D'ECHANTILLONNAGE DES MINERAIS LORRAINS EN PLACE

Les règles ci-dessous sont définies pour les minerais lorrains, mais restent valables pour l'échantillonnage de toutes les couches minéralisées :

Règle 1 : Respecter scrupuleusement la géométrie du support qu'on s'est fixée à l'avance (qu'il s'agisse d'une seule saignée ou de tout un groupe implanté suivant une maille).

Règle 2 : Récupérer en totalité la quantité de matière du prélèvement.

Règle 3 : La section optimale d'une prise est la plus petite dont on puisse réaliser rigoureusement la géométrie.

Règle 4 : La distance minimale entre deux prises voisines (direction horizontale) est l'abscisse correspondant à 95 pour cent de la croissances du variogramme. S'il est technologiquement facile d'adopter une distance encore plus grande, c'est d'autant meilleur (ceci est vrai pour les groupes de saignées, comme dans les échantillonnages par grille entre séries de prises disposées suivant une même verticale).

Règle 5 : En présence d'un variogramme accusant un maximum prononcé (variogramme à effet de trou dans une direction donnée) la maille d'échantillonnage dans cette direction doit impérativement être inférieure ou égale à l'abscisse du maximum.

2. VARIANCES D'ECHANTILLONNAGE DES MINERAIS EN PLACE

On considérera les erreurs de mauvaise limitation de la couche et les erreurs d'analyse chimique comme secondaires vis à vis des fluctuations dues à la régionalisation métrique dans la couche elle-même.

Dans les minerais entrecroisés lorrains, l'expérience vérifie couramment cette hypothèse.

Nous donnons d'abord une première formule, la variance d'une prise de mine, qui est très générale, et applicable à n'importe quel minerai (formule VI, 38). Nous particulariserons ensuite cette formule aux minerais lorrains.

Notations :

- h puissance de la couche
- φ angle de la prise de mine avec la verticale pour une saignée
 $\varphi = 0$, pour des trous de mines obliques habituels $\varphi = 45^\circ$
- b côté du carré auquel on assimile la section droite de la prise
- a_M portée du variogramme horizontal
- a_m portée du variogramme vertical
- C variance ponctuelle (palier du $\gamma(h)$)

2.1. Variance des échantillons linéaires (sondages, saignées ...)

Les résultats sont établis pour une prise continue, mais restent valables pour une prise en trois ou quatre segments, verticaux ou obliques, pourvu que, évidemment, ils traversent au total toute la couche et ne se chevauchent pas.

La variance d'une prise d'écrit alors :

$$(VI, 38) \quad \sigma_S^2 = \frac{C}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a_m^2} + \frac{tg^2}{a_M^2}}} \left[1 + \left(\frac{1}{3} \log \frac{b}{a_M} - 0,44 \right) \frac{b^2}{a_M^2} \right]$$

variance de n prises (la règle 4 étant respectée) :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sigma_S^2$$

Cas particuliers :

Le minéral entrecroisé possède des concrétions calcaires, dans la proportion p_1 . La teneur de ces concrétions est t_1 , celle du minéral interconcrétions est t_2 . Dans ce cas, on a :

Variance des saignées :

$$(VI, 39) \quad \sigma_S^2 = p_1 (1 - p_1) (t_1 - t_2)^2 \frac{a_m}{h}$$

Variance des sondages et trous de mine à 45°

$$(VI, 40) \quad \sigma_S^2 = \frac{p_1 (1 - p_1) (t_1 - t_2)^2}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a_m^2} + \frac{1}{a_M^2}}}$$

Variance d'un groupe de n saignées :

On divise par n la variance d'une saignée, à condition que la règle 4 soit bien respectée.

2.2. Variance des échantillons plans

Il s'agit d'une lame rectangulaire, ou d'une photographie de même forme, extraite du parement ; la longueur de la prise est ℓ , la puissance et les autres paramètres conservent leurs notations précédentes. La variance de la lame est :

$$(VI, 41) \quad \sigma_P^2 = C \cdot \frac{a_m}{h} \cdot \frac{a_M}{\ell} \left[\frac{\gamma}{5} - \frac{1}{3} \left(\frac{a_M}{\ell} + \frac{a_m}{h} \right) \right]$$

Cette formule est générale. Particularisons la au cas des concrétions

$$\sigma_P^2 = p_1 (1 - p_1) \cdot (t_1 - t_2)^2 \cdot \frac{a_m}{h} \cdot \frac{a_M}{\ell}$$

2.3. Variance d'un groupe de prises ponctuelles disposées aux noeuds d'une grille rectangulaire

On suppose que la grille est formée de verticales (perpendiculaires à la couche) suffisamment éloignées les unes des autres pour que la règle 4 s'applique. La variance d'une de ces verticales est alors (d est la distance entre 2 prélèvements voisins) :

$$\sigma_c^2 = \frac{C}{a_m} \cdot \frac{1}{h} \left[a_m^2 + \frac{d^2}{6} \right]$$

La variance de la grille, formée de n verticales, est :

$$\sigma_G^2 = \frac{1}{n} \sigma_c^2$$

Cas particulier des minerais à concrétions : on a alors

$$\sigma_G^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{p_1 (1 - p_1) (t_2 - t_1)^2}{a_m \cdot h} \left[a_m^2 + \frac{d^2}{6} \right]$$

2.4. Echantillonnage et paragenèses

Les formules précédentes, écrites avec p_1 , t_1 et t_2 , sont définies pour des minerais entrecroisés. Si le minerai est en partie argileux on applique ces formules à la partie entrecroisée, de puissance h_1 , de la couche dont la puissance totale est h.

On pondérera ensuite la variance trouvée par $\left(\frac{h_1}{h}\right)^2$.

Si le minerai est entièrement argileux, il faut reprendre les formules générales (VI, 38), (VI, 41), ou (VI, 43).

3. EXERCICE-TYPE D

Un minerai entrecroisé a une puissance de 3,20 m, une proportion $p_1 = 0,21$ de concrétions calcaires de teneur $t_1 = 13,5 \%$, le minerai interconcrétions titrant $t_2 = 44,5 \%$; la portée verticale a_m est de 6 cm.

Quelle est la variance d'une saignée ? Combien faut-il mettre de saignées parallèles pour que la prise totale ait une variance qui n'excède pas 1 point² ?

Appliquons la formule (VI, 39) pour connaître la variance d'une saignée :

$$\begin{aligned}\sigma_S^2 &= p_1 (1 - p_1) (t_1 - t_2)^2 \cdot \frac{a_m}{h} \\ &= 0,21 \cdot 0,79 \cdot 31^2 \cdot \frac{6}{320} \\ &= 2,98 \sim 3 \text{ points}^2\end{aligned}$$

Il faut donc utiliser des groupes d'au moins trois saignées si l'on désire que la variance totale n'excède pas 1 point².

4. NORME D'ECHANTILLONNAGE DES MINERAIS LORRAINS EN PLACE

Concluons cette étude pratique par l'énoncé d'une norme d'échantillonnage valable pour les minerais lorrains :

Si l'on veut connaître et connaître efficacement un minerai lorrain en place, sa variance d'échantillonnage doit au plus être égale à 1 point², on cherchera en pratique à la rendre inférieure à 0,5 point².

ETUDES PRATIQUES

CHAPITRE VII

LE KRIGEAGE

1 - Règles pratiques d'utilisation du krigeage

2 - Krigeage à mailles régulières, cas général

2.1. Exercice type E

Exemple de lecture des abaques de krigeage régulier

2.2. Abaques de krigeage par mailles et panneaux réguliers

3 - Krigeage régulier : trois cas particuliers

3.1. Etude des petits panneaux isotropes, quand l'effet de pépité $\xi = 0$

3.2. Cas particulier unidimensionnel

3.3. Le krigeage élémentaire :

- Exercice-type F

Exemple d'utilisation du krigeage élémentaire

- Abaques du krigeage élémentaire

4 - Le krigeage aléatoire

CHAPITRE VII

LE KRIGEAGE

Dans ce chapitre, où les abaques sont assez volumineux, on n'a pas adopté le même plan que dans le reste des études pratiques, avec une partie de formules et abaques et une autre d'exercices-type. Il nous a paru plus clair de faire précéder deux des trois groupes principaux d'abaques de l'exercice correspondant (le troisième groupe dit du "krigeage aléatoire" se manipule exactement comme le premier).

Il y a donc 4 paragraphes dans cette étude pratique :

- règles pratiques d'utilisation du krigeage
- krigeage régulier - cas général (précédé d'un exercice-type)
- trois cas particuliers du krigeage régulier. L'un surtout est important, le krigeage élémentaire, relatif à l'estimation de la production mensuelle d'une exploitation du type mine de fer de Lorraine (on y a donc développé un exercice-type).
- le krigeage aléatoire.

1. REGLES PRATIQUES GENERALES

Le problème du krigeage tel qu'il est étudié ici est celui de l'estimation locale d'un panneau extrait d'une régionalisation intrinsèque admettant pour $\gamma(h)$ un schéma de Matheron. On peut cependant étendre au schéma de Formery (mais pas au schéma gaussien) tous les résultats relatifs aux mailles petites et moyennes.

Le principe de la présentation est le suivant : on se donne un panneau, rectangulaire, triangulaire, ou de forme quelconque selon les cas, et son échantillonnage. Celui-ci est divisé en deux ensembles. D'une part les sondages très proches, ou internes au panneau, et d'autre part le reste des reconnaissances. Chacun des sondages proche est différencié, en ce sens qu'on lui attribue une importance, un poids particulier par rapport aux autres, alors que les autres, éloignés, jouent tous le même rôle et n'interviennent que par leur moyenne, qui est la teneur moyenne du gisement. On a supposé, pour simplifier, qu'il y avait une infinité de ces reconnaissances éloignées, c'est-à-dire, expérimentalement, plus d'une quarantaine.

Pour pouvoir entrer dans les abaques, il faut connaître les caractéristiques du schéma de Matheron de la portion de gisement étudiée, à savoir :

- l'effet de pépite $\mathcal{E} = \frac{C_0}{C}$
- les portées extrémales a_M et a_m
- la variance dans un champ infini $C + C_0$.

Il faut aussi, bien entendu, connaître les caractéristiques géométriques du panneau qu'on veut étudier.

Les abaques, ou le cas échéant les formules, fournissent alors les poids λ_i à attribuer à chaque sondage, et la variance d'extension σ_K^2 , dite variance de krigeage, correspondant à cette estimation.

Les résultats obtenus sont superposables. Par conséquent, si deux panneaux sont estimés à partir du même réseau de sondages (que ceux-ci interviennent de façon différenciée ou non dans l'estimation), la teneur de la somme des deux panneaux s'estime en pondérant les poids de chaque sondage par les tailles des panneaux. Un sondage qui n'intervient que dans la moyenne indifférenciée de tout le gisement a évidemment un poids nul.

2. KRIGEAGE A MAILLES REGULIERES - CAS GENERAL

Le panneau de base est le rectangle P de côtés ℓ et k , reconnu par les 4 sondages d'angle et le sondage central (fig. VII - 5). On étudie successivement toutes les configurations correspondant à l'absence d'un ou de plusieurs des sondages de ce groupe de base.

A partir du panneau P on peut définir trois formes de panneaux (figure VII, 6), P lui-même, ou le triangle T, demi rectangle limité par une diagonale, ou enfin le losange L, obtenu en joignant le milieu des côtés de P.

P et L ont les mêmes estimateurs. On peut donc leur appliquer les mêmes formules et les mêmes abaques (à ceci près que la variance de krigeage de L est légèrement supérieure à celle de P).

Le triangle T a par contre des caractéristiques différentes et fait l'objet d'une collection particulière d'abaques.

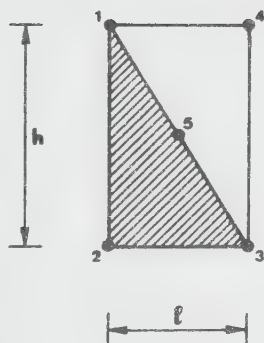
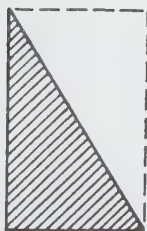


Figure VII-5

Panneau type du krigage régulier.



R



T



L

Figure VII-6

Mailles moyennes et grandes;
types des panneaux krigés.

2.1. Exercice-type E

Donnons un exemple de lecture des abaques de krigeage régulier.

Le panneau à estimer est un triangle correspondant au cas 4 (un sondage à chaque sommet), les côtés de l'angle droit valent tous les deux cent mètres.

Les caractéristiques de la régionalisation sont :

schéma de Matheron

portées extrémales (définies comme intersections des tangentes à l'origine avec le palier des variogrammes) : 200 mètres et 400 mètres, en gros dans les mêmes directions que les côtés du panneau

effet de pépité $\xi = \frac{C_0}{C} = 0,10$

variance dans un champ infini : $C + C_0 = 10 \text{ points}^2$

Consultons les abaques 36 à 38.

1°) Corrigeons par affinité les dimensions de la figure pour nous ramener à une régionalisation isotrope. D'après les dimensions des portées, le côté de 100 mètres du triangle, dans la direction la plus variable, équivaut à un côté de 200 mètres dans la direction la moins variable.

On prend donc le contexte équivalent suivant : un triangle rectangle de 100 m x 200 m de côtés d'angle droit, plongé dans une régionalisation isotrope de portée $a = 400$ mètres.

Il faut d'abord s'être ramené à une régionalisation isotrope avant de lire les abaques.

2°) Lisons les abaques 36, 37 et 38.

Le rapport du grand côté $L = 200$ mètres sur la portée $a = 400$ mètres vaut 0,5, d'autre part les trois facteurs correctifs d'anisotropie sont négligeables.

ϵ vaut dans l'exemple 0,10. On interpole aux deux tiers entre les valeurs 0 et 0,15 de l'abaque. Il vient :

sommet A de l'angle le moins aigu	: 30,5 %
sommet B de l'angle droit	: 39 %
sommet C de l'angle le plus aigu	: 30,5 %.

Le poids des sondages extérieurs est le complément à 1 de la somme de ces valeurs. Il est donc nul, aux erreurs de lecture près, pour notre exemple, ce qui est assez naturel car trois sondages d'angle constituent un écran assez efficace (le lecteur pourra, à titre de curiosité, voir ce qui se passe si l'un ou deux de ces sondages viennent à manquer et constatera que l'extérieur reprend très vite de l'importance).

Donnons-nous des teneurs en A B C. Les deux sommets extrêmes titrent par exemple 34 % de fer chacun et le sommet de l'angle droit 30 % seulement. La teneur pondérée par ces trois poids est donc

$$t = \frac{61 \times 34 + 39 \times 30}{100} = 32,4$$

Elle est à peu près un demi point au dessous de ce qu'aurait donné la simple pondération arithmétique. Cela n'est déjà pas négligeable, d'autant plus que nous nous sommes placés dans un cas de figure favorable à cette similitude de résultats. Si l'on avait supprimé l'effet d'écran en prenant une configuration moins complète et si des sondages centraux et des sondages périphériques à la fois, la différence pouvait facilement atteindre un à deux points.

Il reste à calculer la variance de krigeage. On peut utiliser la formule (VII, 20) donnée en fin des abaques, ou plus simplement reprendre la formule de variance d'extension en schéma linéaire du chapitre IV (abaque ch. IV, fig. 27).

L'angle le plus aigu du triangle vaut $\text{Arc tg } \frac{1}{2} = 29,5$ grades. L'abaque n° 27 du chapitre IV est graduée en grades, on y lit à l'intersection des lignes 100 grades et 29,5 grades, la valeur : 0,147. Pour passer à la variance d'extension, il faut multiplier cette valeur par la pente à l'origine du $\gamma(h)$; soit :

$$\frac{C}{a} = \frac{9}{400}$$

et par le diamètre du cercle circonscrit au triangle, soit :

$$D = \sqrt{100^2 + 200^2} = 224 \text{ mètres.}$$

La variance d'extension de notre krigeage vaut par conséquent le terme régionalisé plus la composante due à l'effet de pépité :

$$\sigma_K^2 = D \cdot \frac{C}{a} \cdot 0,147 + \frac{C_0}{3} = 0,82 + 0,3 = 1,1 \text{ pts}^2$$

2.2. Abaques de krigeage par mailles et panneaux réguliers

Les abaques qui suivent regroupent les résultats numériques relatifs aux trois types de mailles. On n'y a rapporté que les coefficients λ_1 , en fonction de la taille du panneau, de son anisotropie et de l'effet de pépité ε .

Le petit côté du rectangle (ou du triangle) est ℓ , le plus grand L . Sur chaque abaque, la courbe continue est relative au panneau carré de côté L . Dans le cas de mailles moyennes et petites, le facteur d'anisotropie est apporté par le terme correctif situé en bas d'abaque, à ajouter algébriquement au λ lui-même. Dans le cas des grandes mailles, l'anisotropie se manifeste différemment et l'on doit remplacer le rectangle $\ell \cdot L$ par le carré de même surface. C'est le côté de ce carré qui est alors porté sur l'axe Ox .

ε varie de façon discrète suivant les valeurs 0; 0,15 et 0,30. Au delà, on utilisera les abaques de krigeage aléatoire, en-deça, on interpolera graphiquement.

a est défini comme l'abscisse de l'intersection de la tangente à l'origine du variogramme avec son palier ; en schéma de Matheron, il correspond par conséquent aux deux tiers de la portée.

Le début des abaques (jusqu'à $L = 0.7 a$) est valable pour tout schéma qu'on assimile à sa tangente à l'origine.

Fig.12 - Liste des abaques de krigeage.

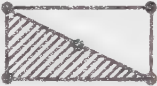
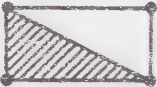
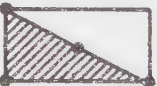
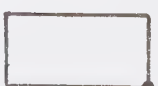
		Configurations :	
		rectangulaires	triangulaires
cas 1		2 abaques (fig.13 et 14)	 5 abaques (fig.15 à 19)
cas 2		1 " " 20	 4 " " 21 à 24
cas 3		4 " " 25 à 28	 4 " " 29 à 32
cas 4		3 " " 33 à 35	 3 " " 36 à 38
cas 5		2 " " 39 et 40	 3 " " 41 à 43
cas 6		1 " " 44	 2 " " 45 et 46
cas 7		2 " " 47 et 48	 3 " " 49 à 51
cas 8		1 " " 52	 2 " " 53 et 54
cas 9		1 " " 55	 1 " " 56
cas 9 ^{bis}		1 " " 57	 1 " " 58

Fig.13

Configuration rectangulaire n°1

Valeurs des pondérateurs λ ($\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C$ ou λ_D)

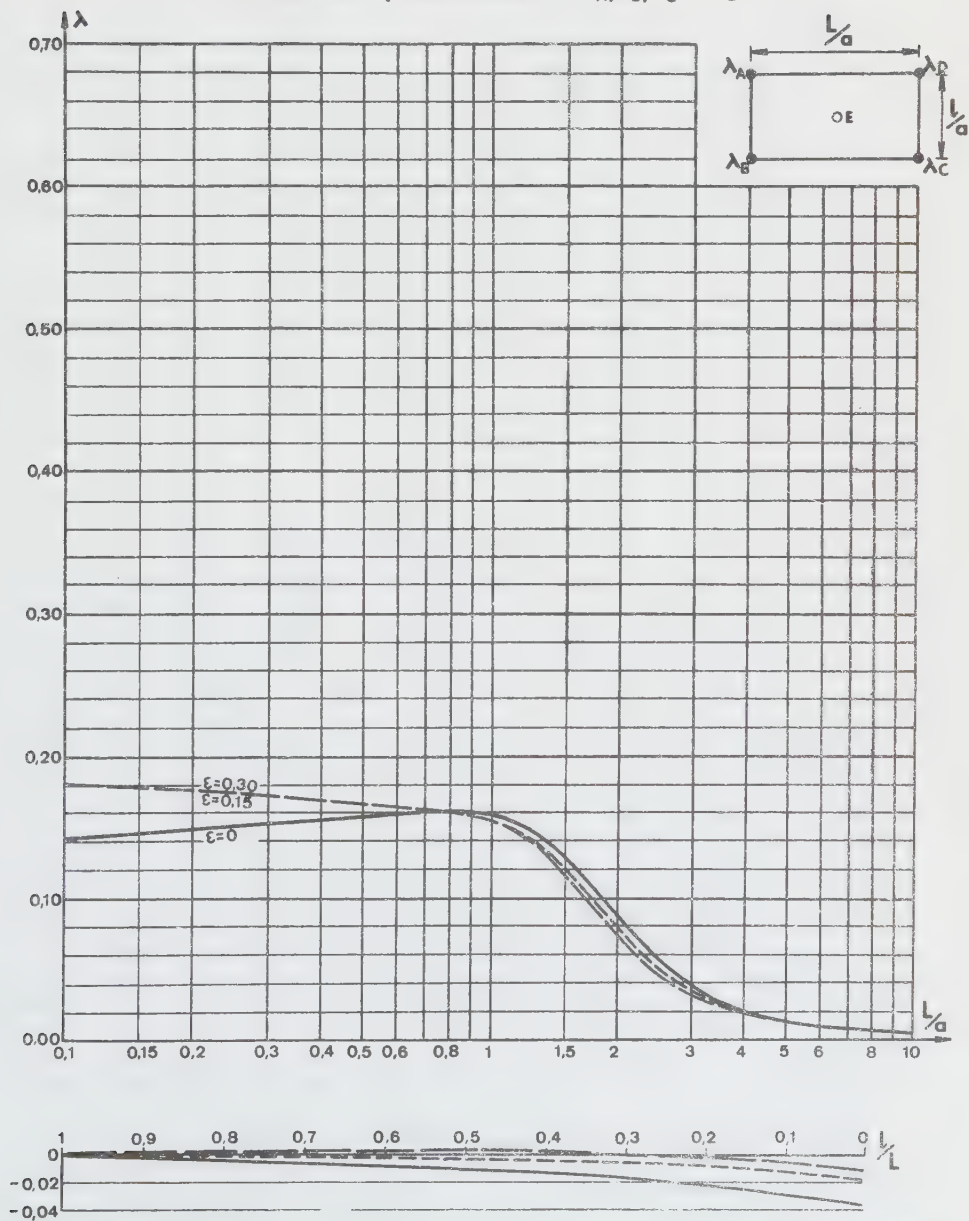


Fig.14

Configuration rectangulaire n°1

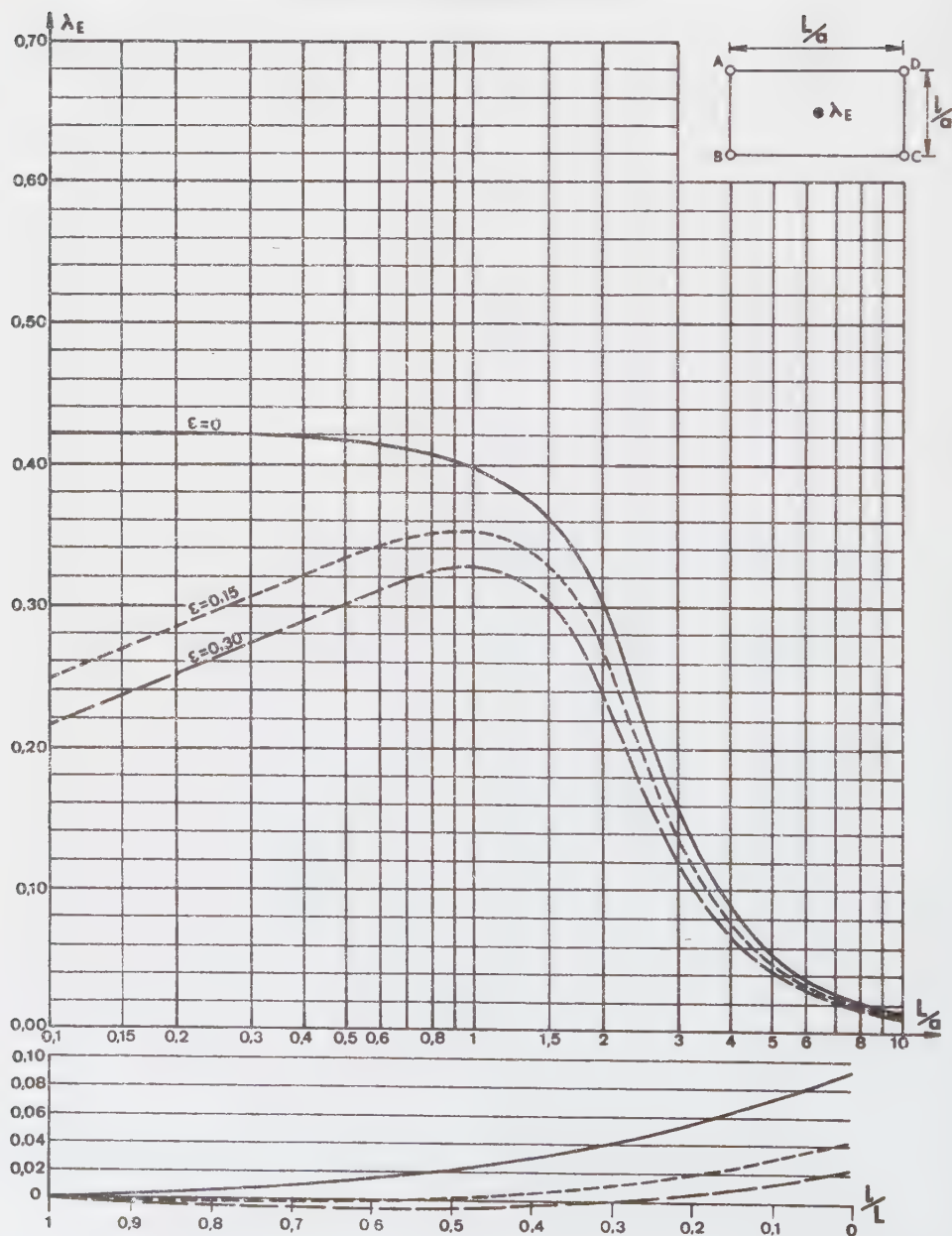
Valeurs du pondérateur λ_E 

Fig.15

Configuration triangulaire n°1

Valeurs du pondérateur λ_C

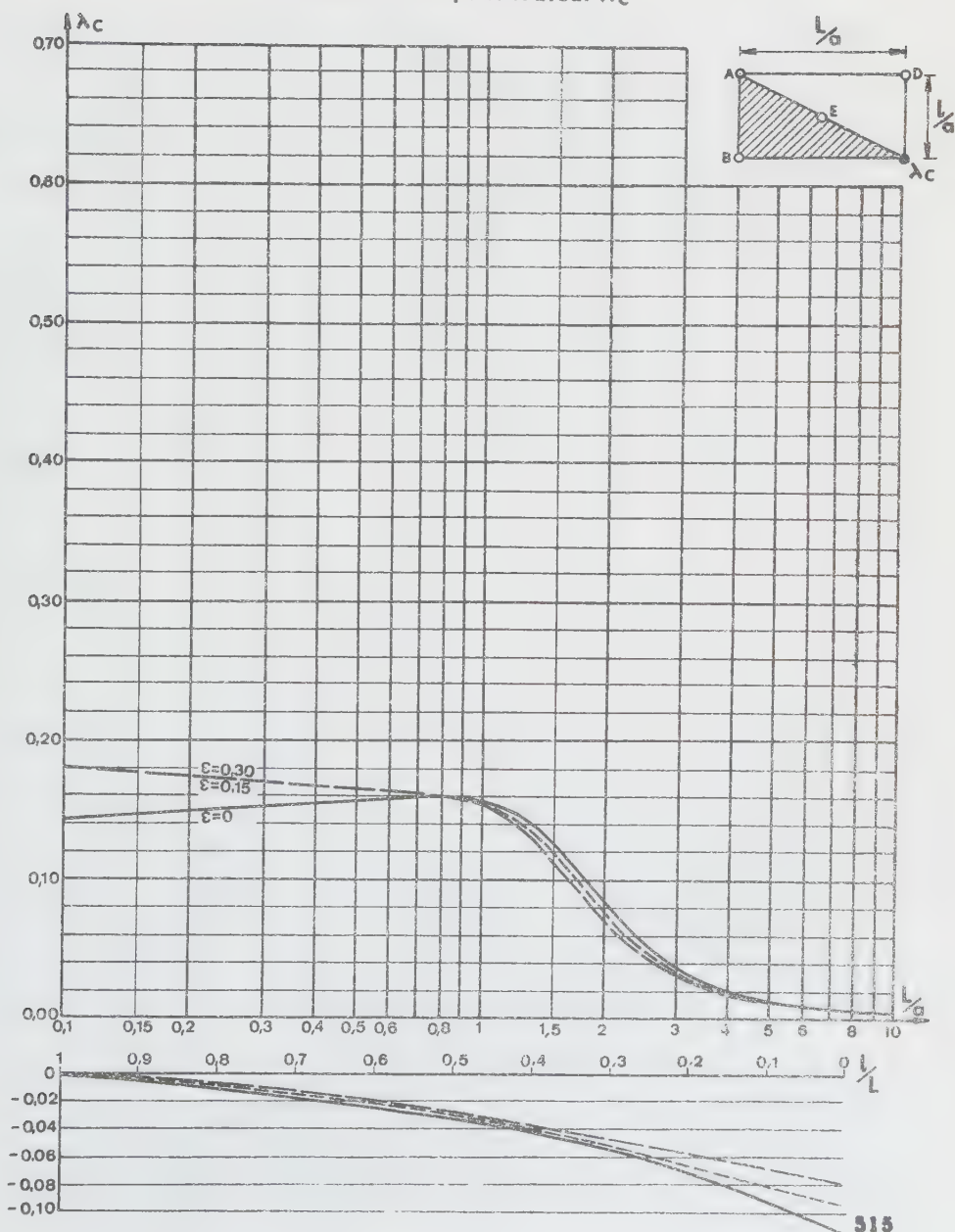


Fig.16

Configuration triangulaire n°1

Valeurs du pondérateur λ_B

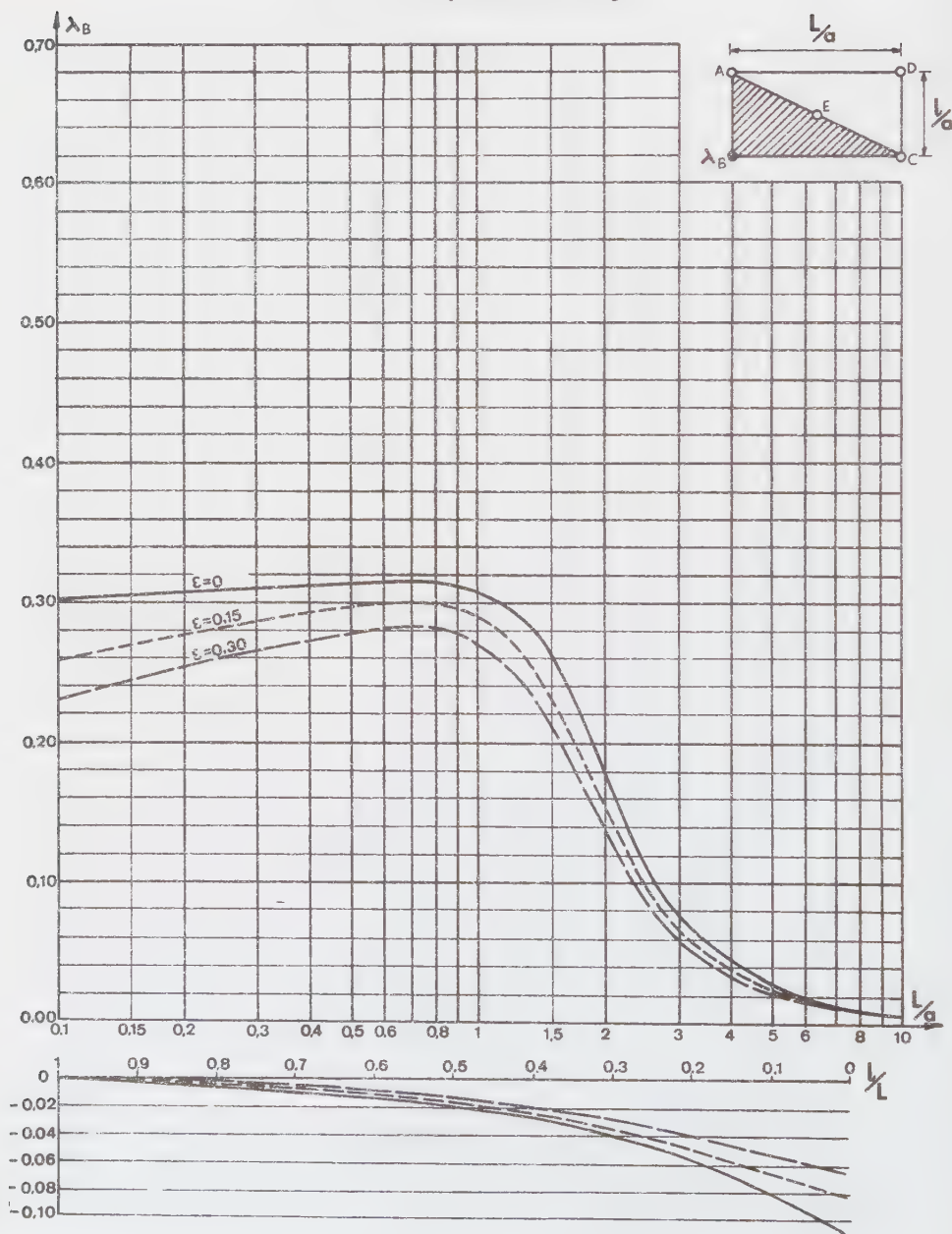


Fig.17

Configuration triangulaire n°1

Valeurs du pondérateur λ_A

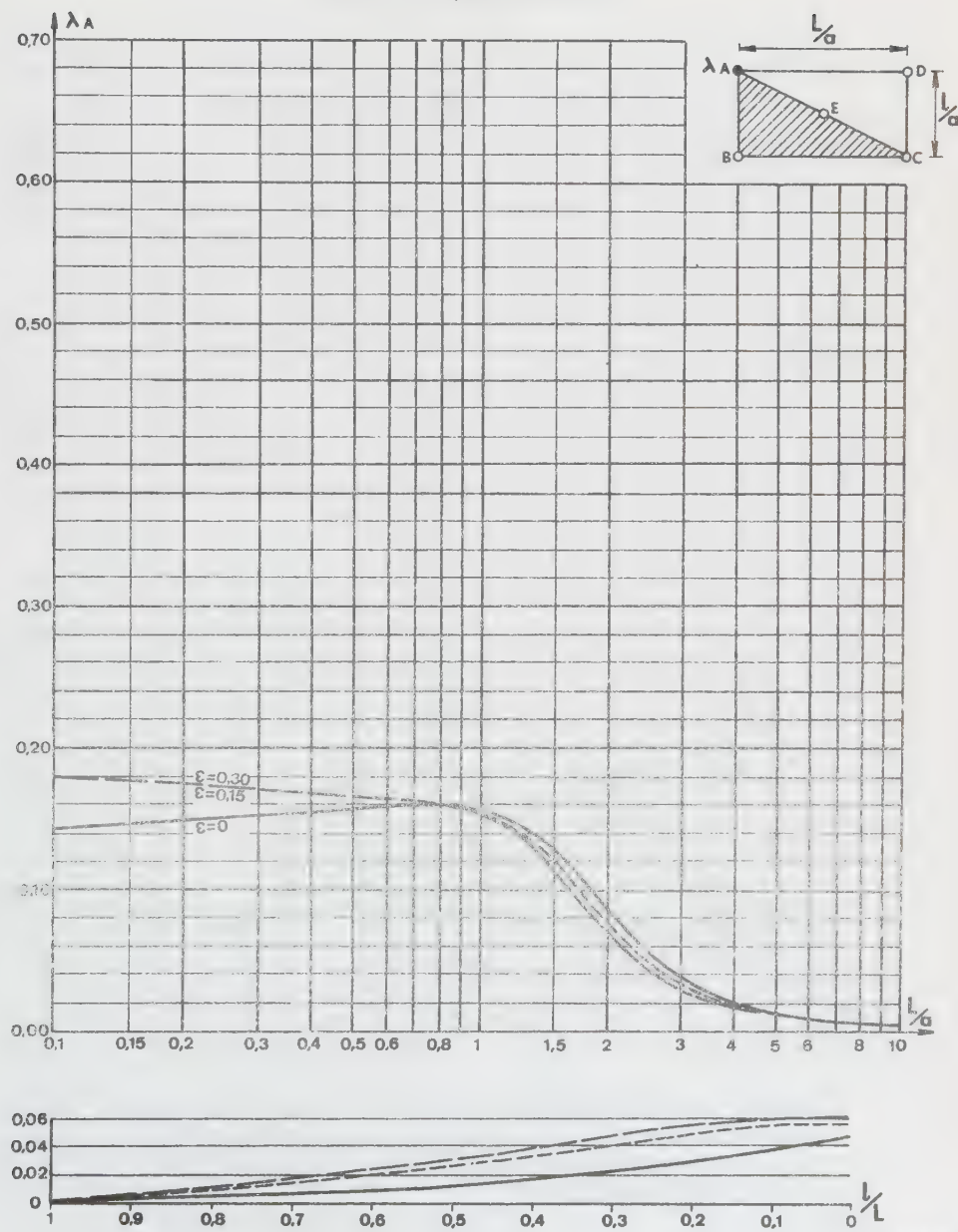


Fig. 18

Configuration triangulaire n°1

Valeurs du pondérateur λ_D

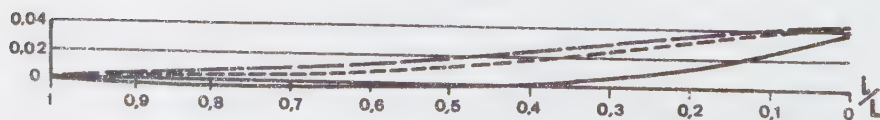
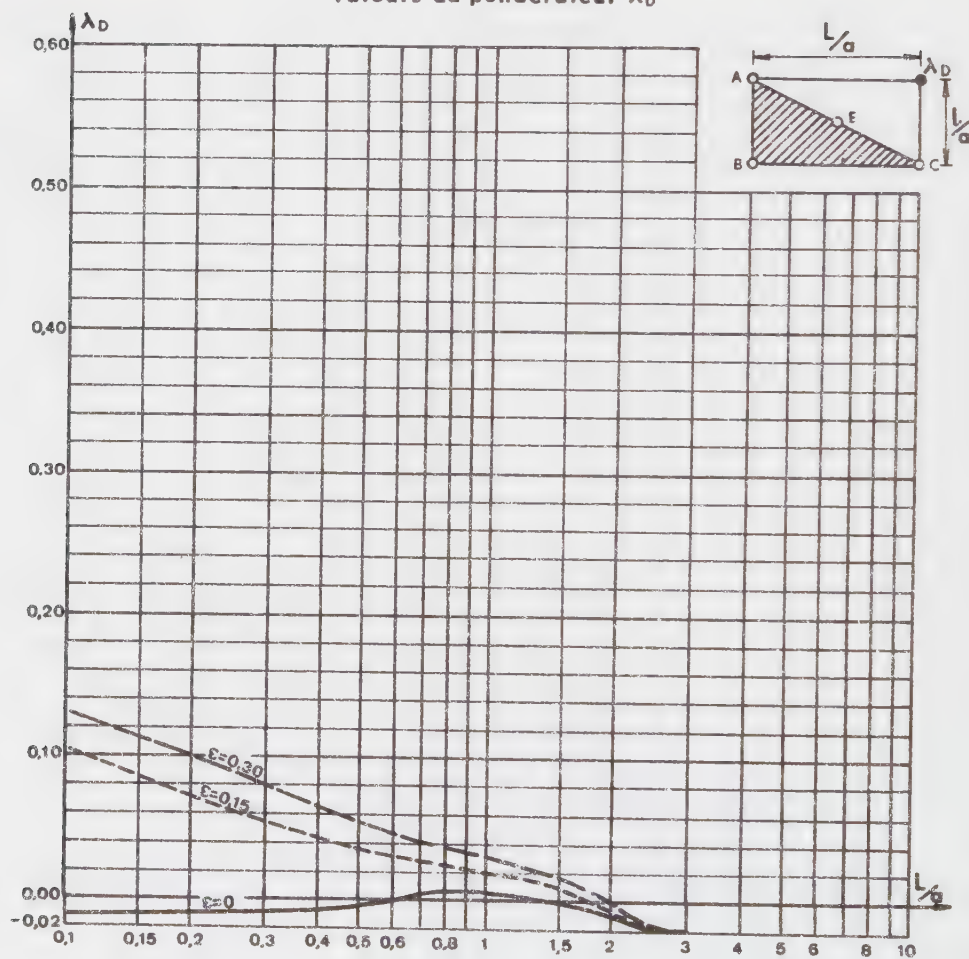


Fig.19

Configuration triangulaire n°1

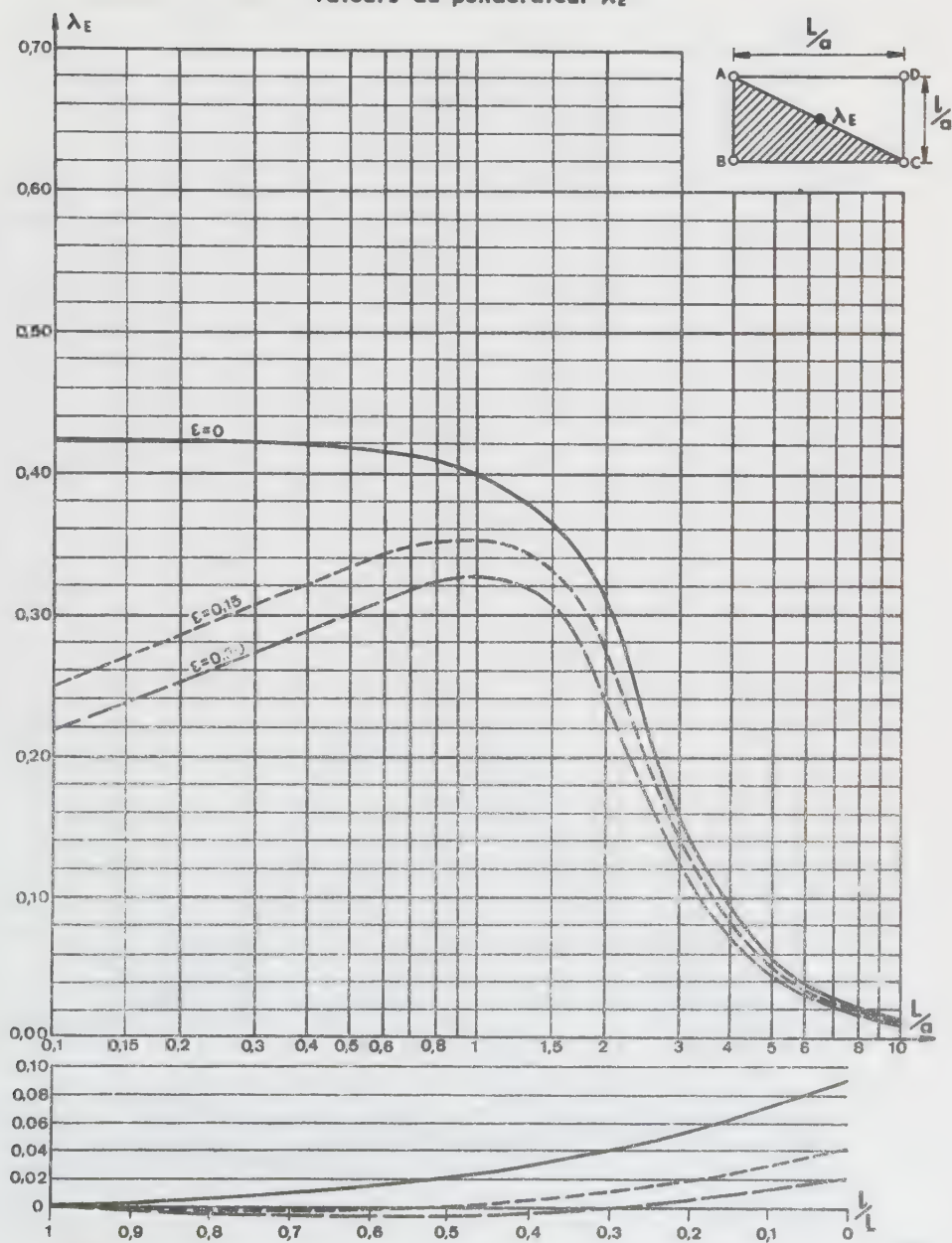
Valeurs du pondérateur λ_E 

Fig.20

Configuration rectangulaire n°2

Valeurs d'un des pondérateurs λ ($\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C$ ou λ_D)

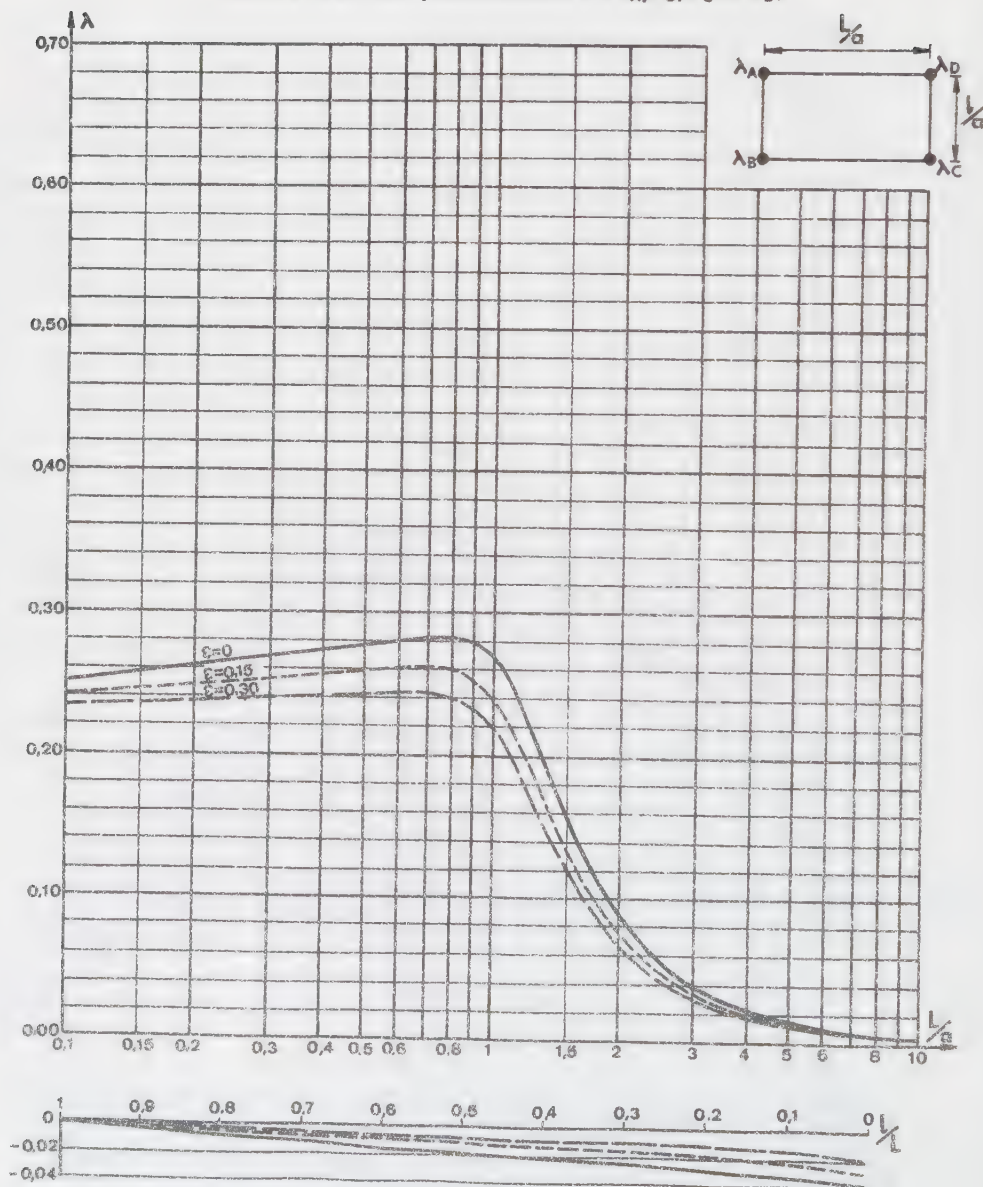


Fig.21

Configuration triangulaire n° 2

Valeurs du pondérateur λ_c

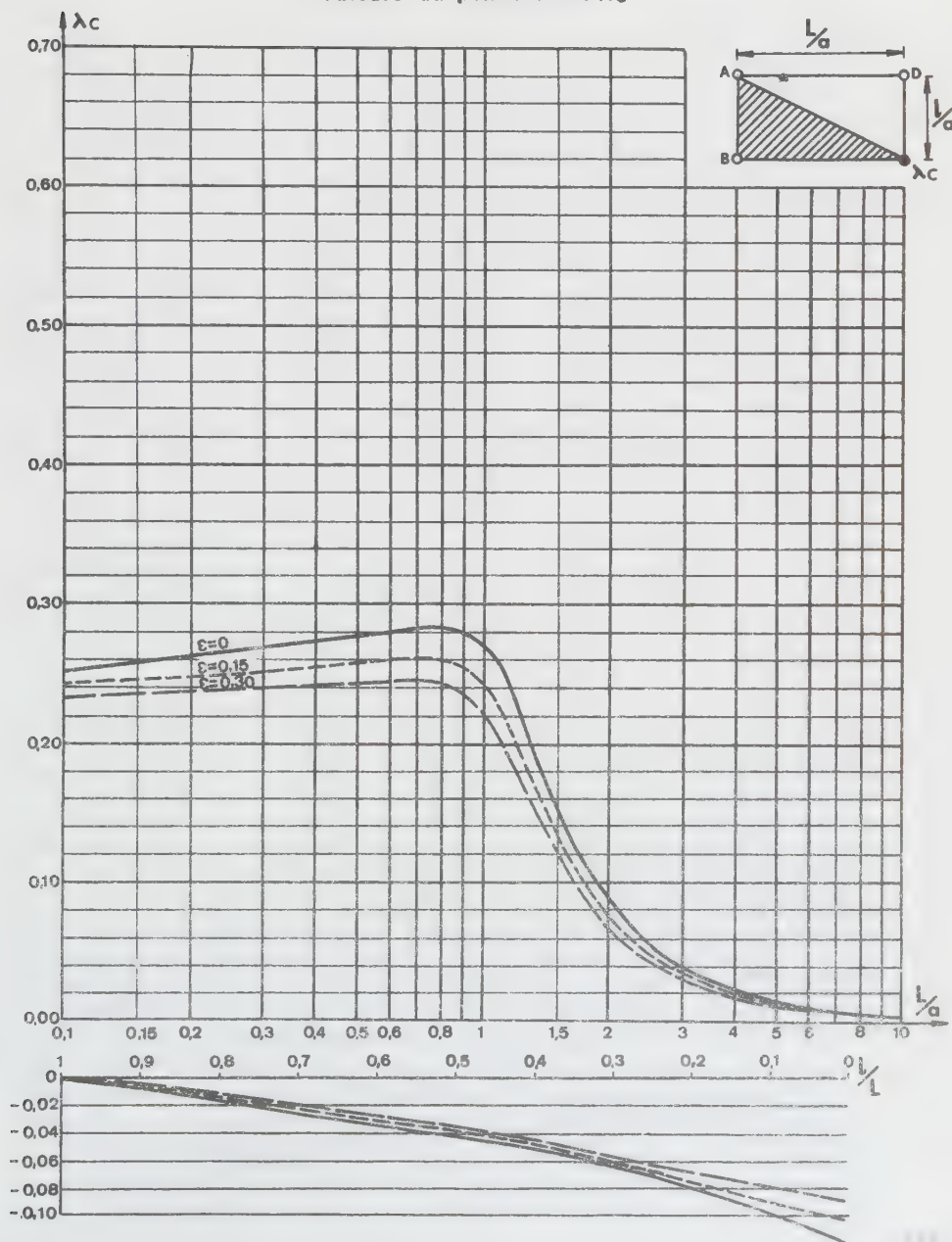


Fig.22

Configuration triangulaire n°2

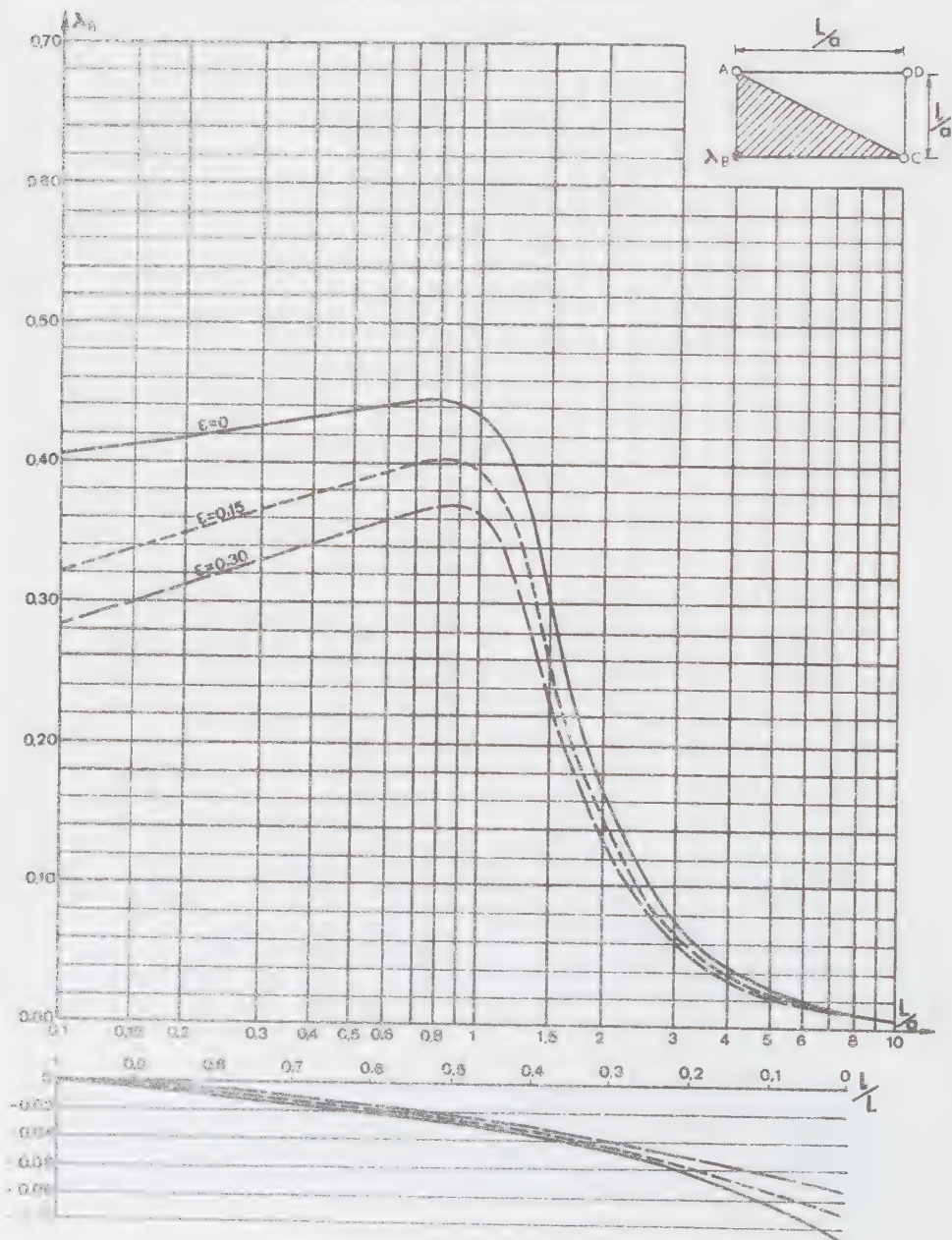
Valeurs du pondérateur λ_B 

Fig. 23

Configuration triangulaire n°2

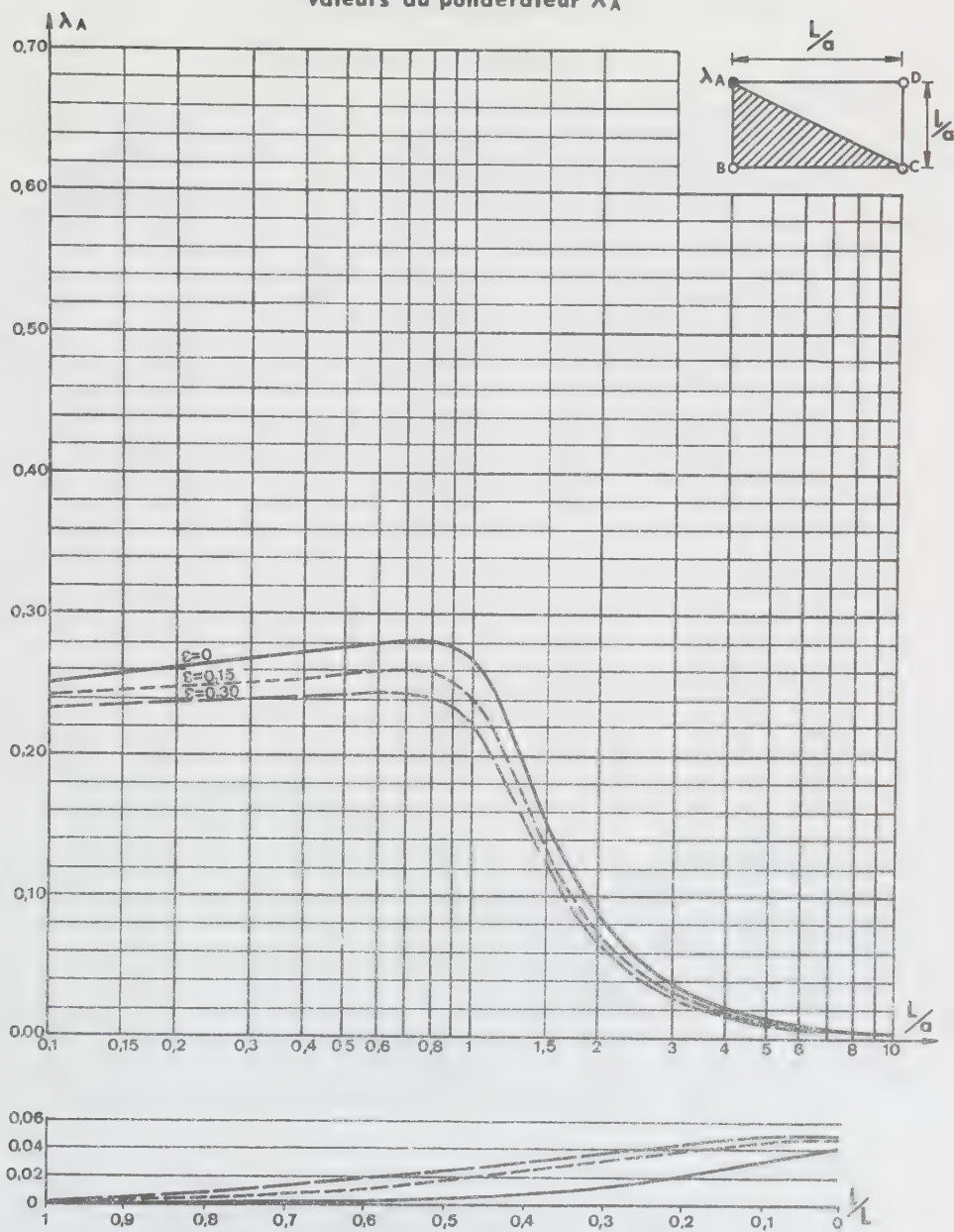
Valeurs du pondérateur λ_A 

Fig.24

Configuration triangulaire n°2

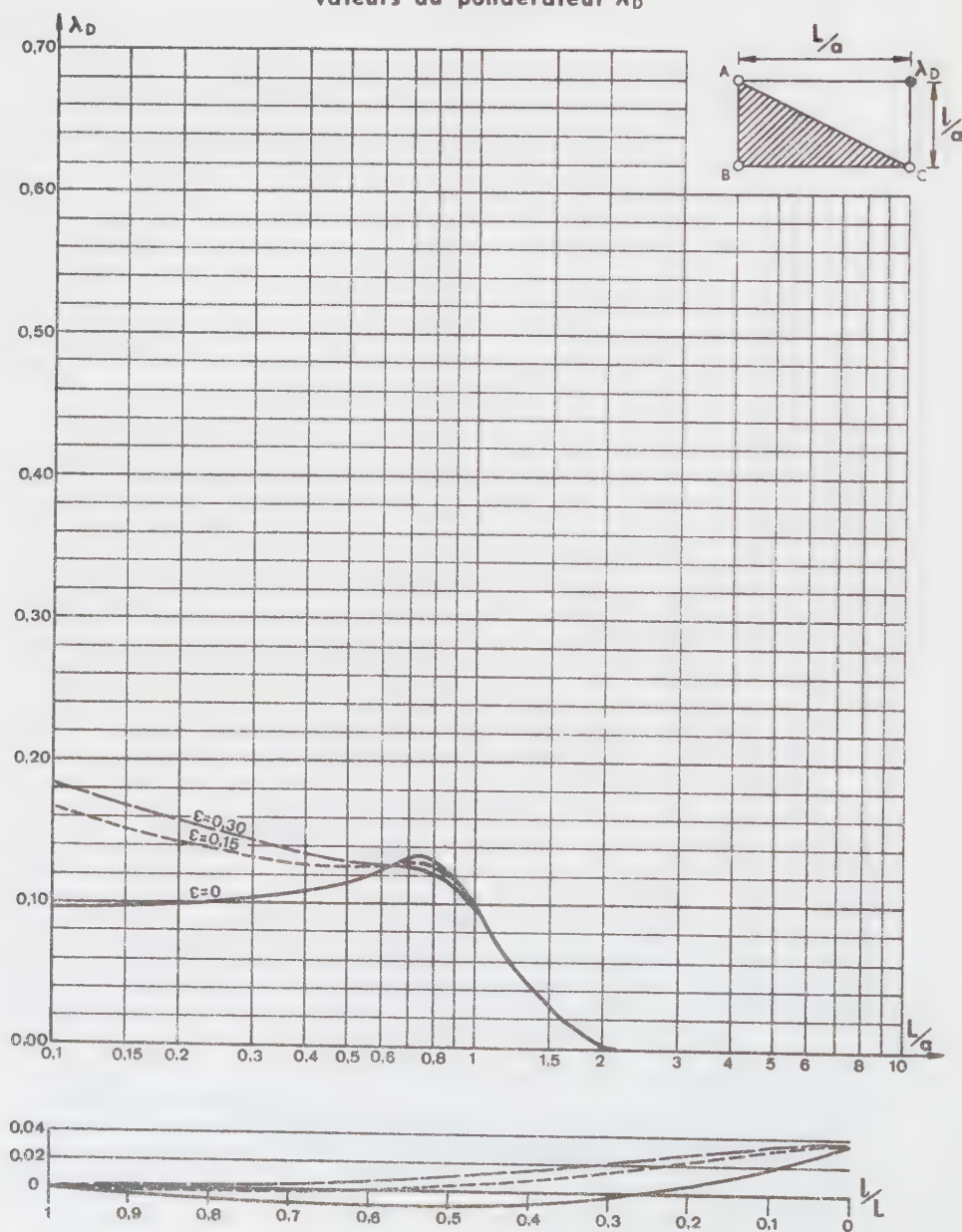
Valeurs du pondérateur λ_D 

Fig.25

Configuration rectangulaire n°3

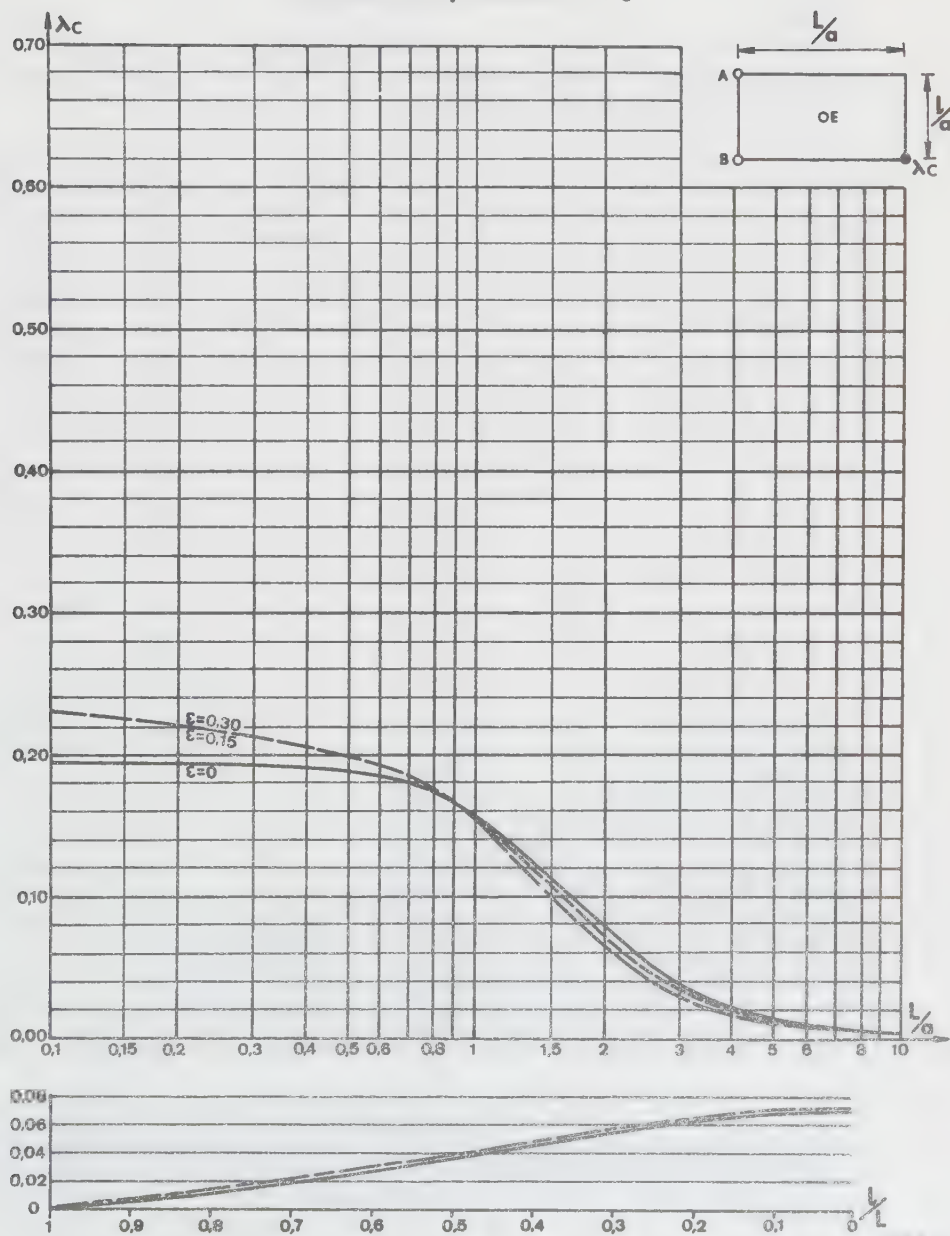
Valeurs du pondérateur λ_c 

Fig.26

Configuration rectangulaire n°3

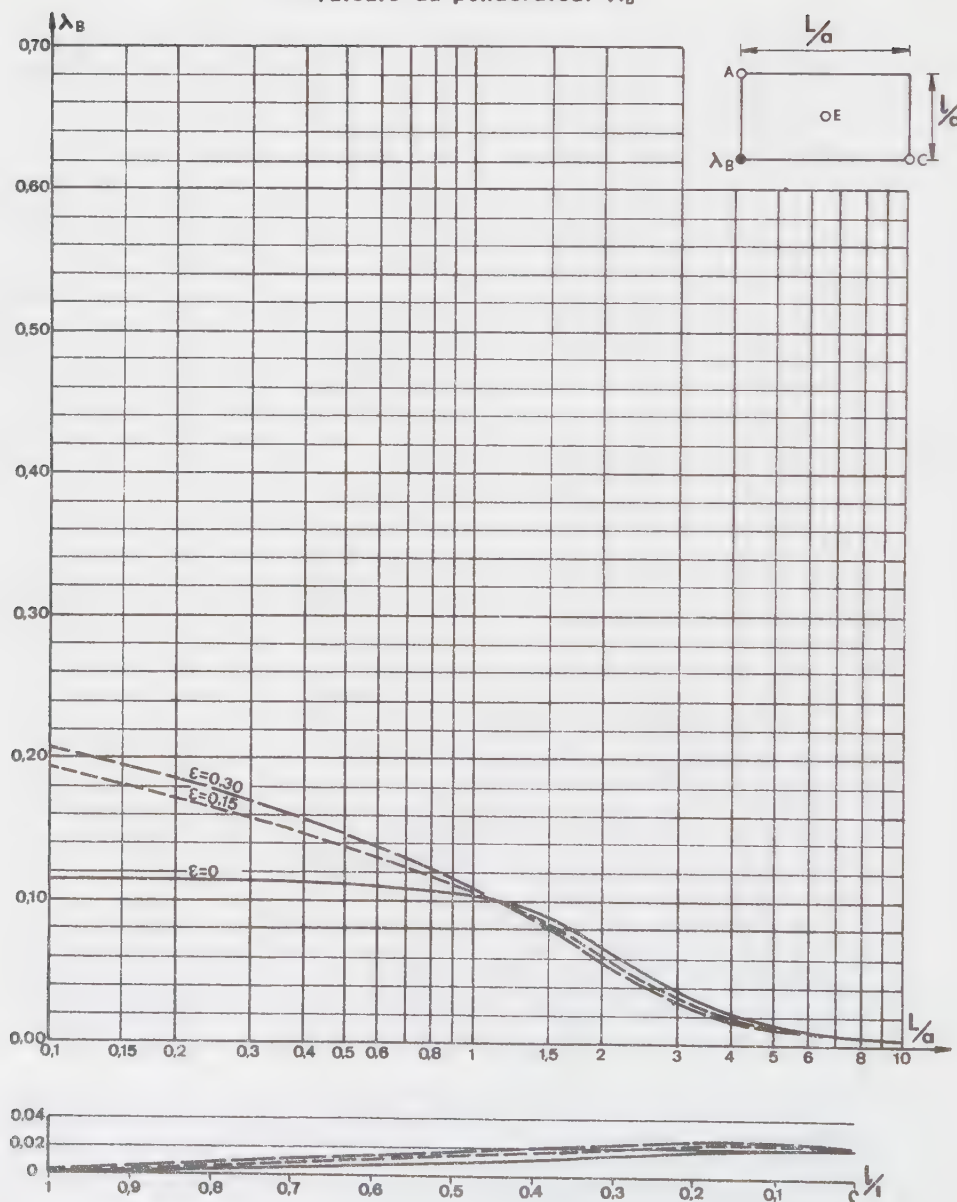
Valeurs du pondérateur λ_B 

Fig. 27

Configuration rectangulaire n°3

Valeurs du pondérateur λ_A

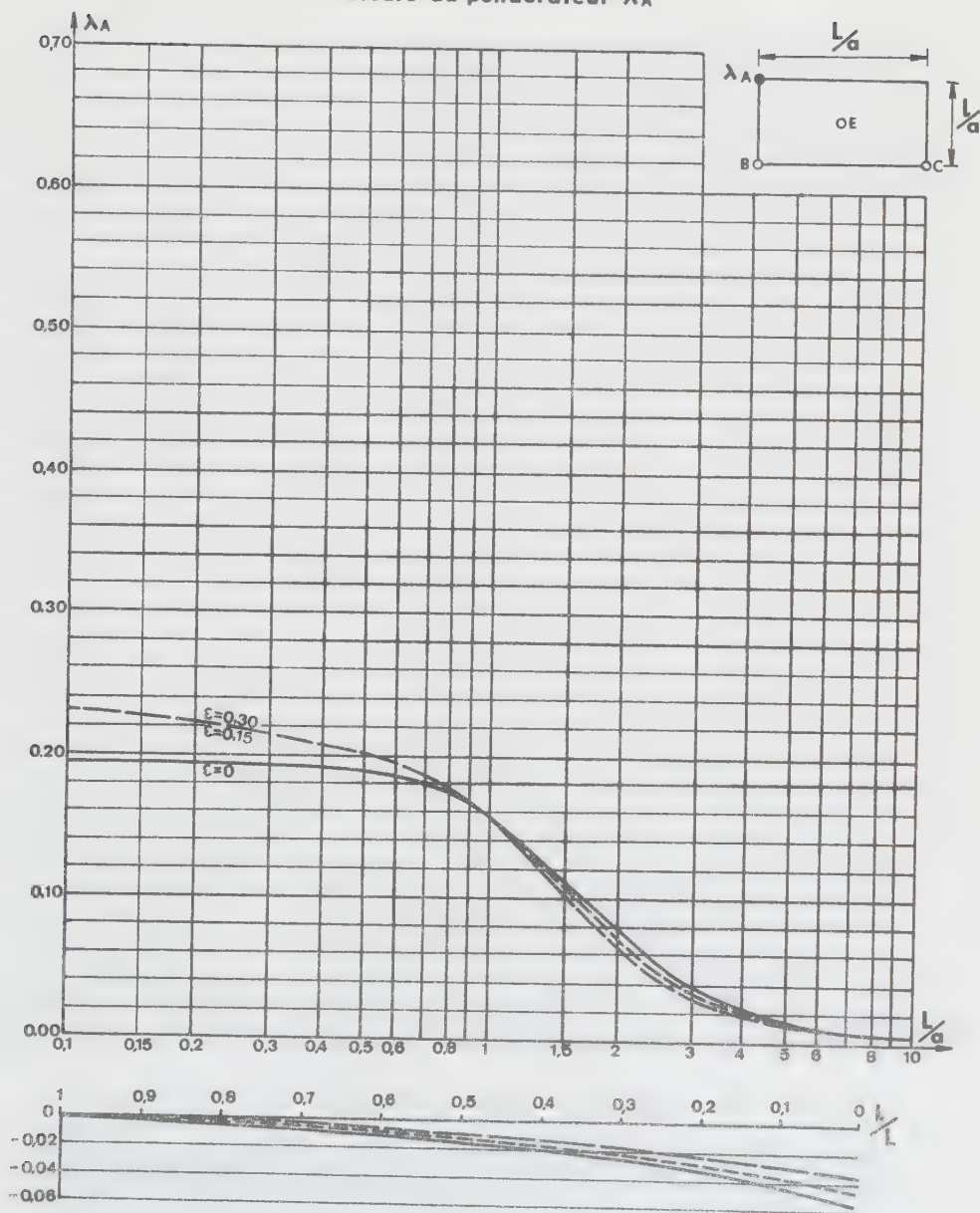


Fig. 28

Configuration rectangulaire n° 3

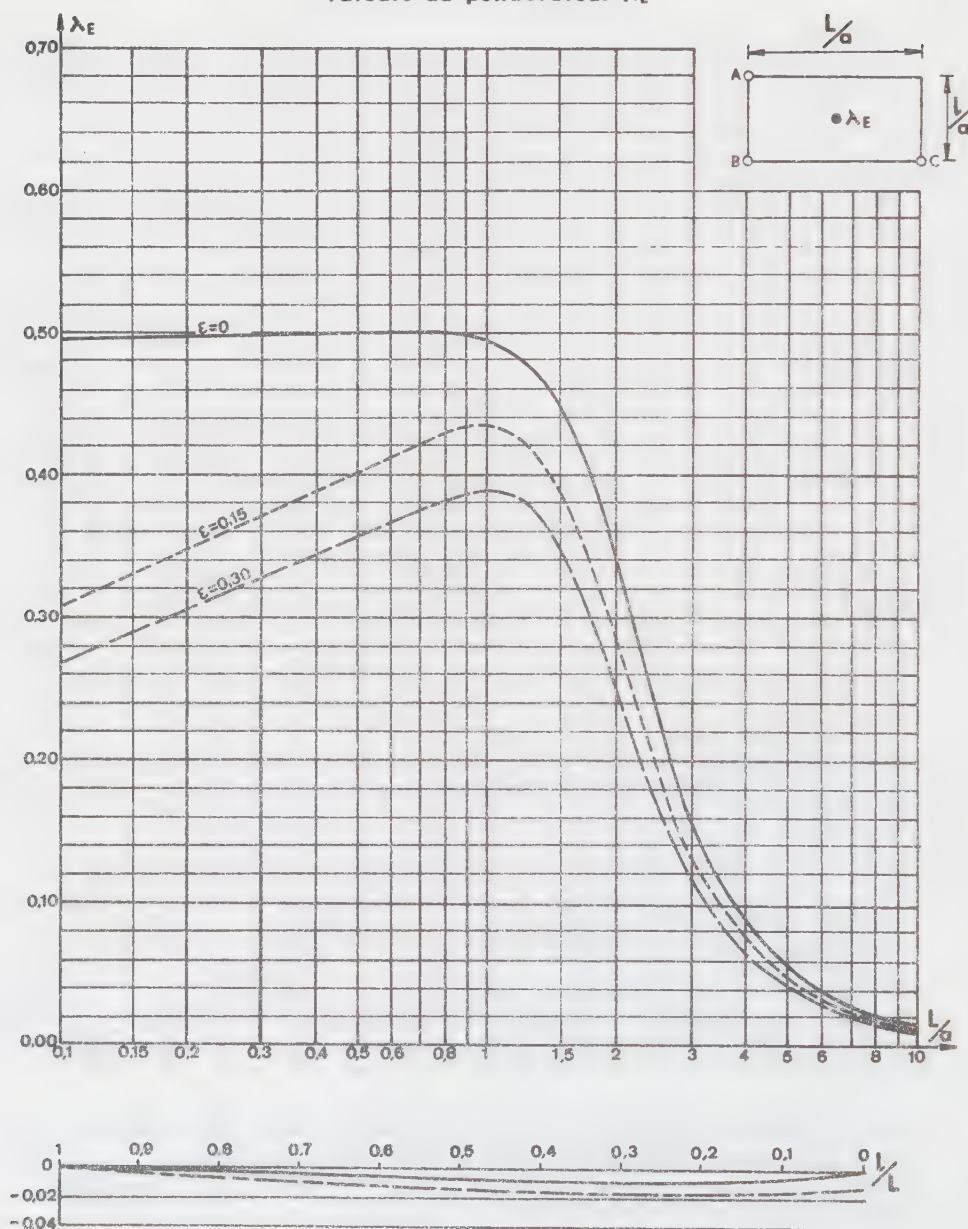
Valeurs du pondérateur λ_E 

Fig.29

Configuration triangulaire n°3

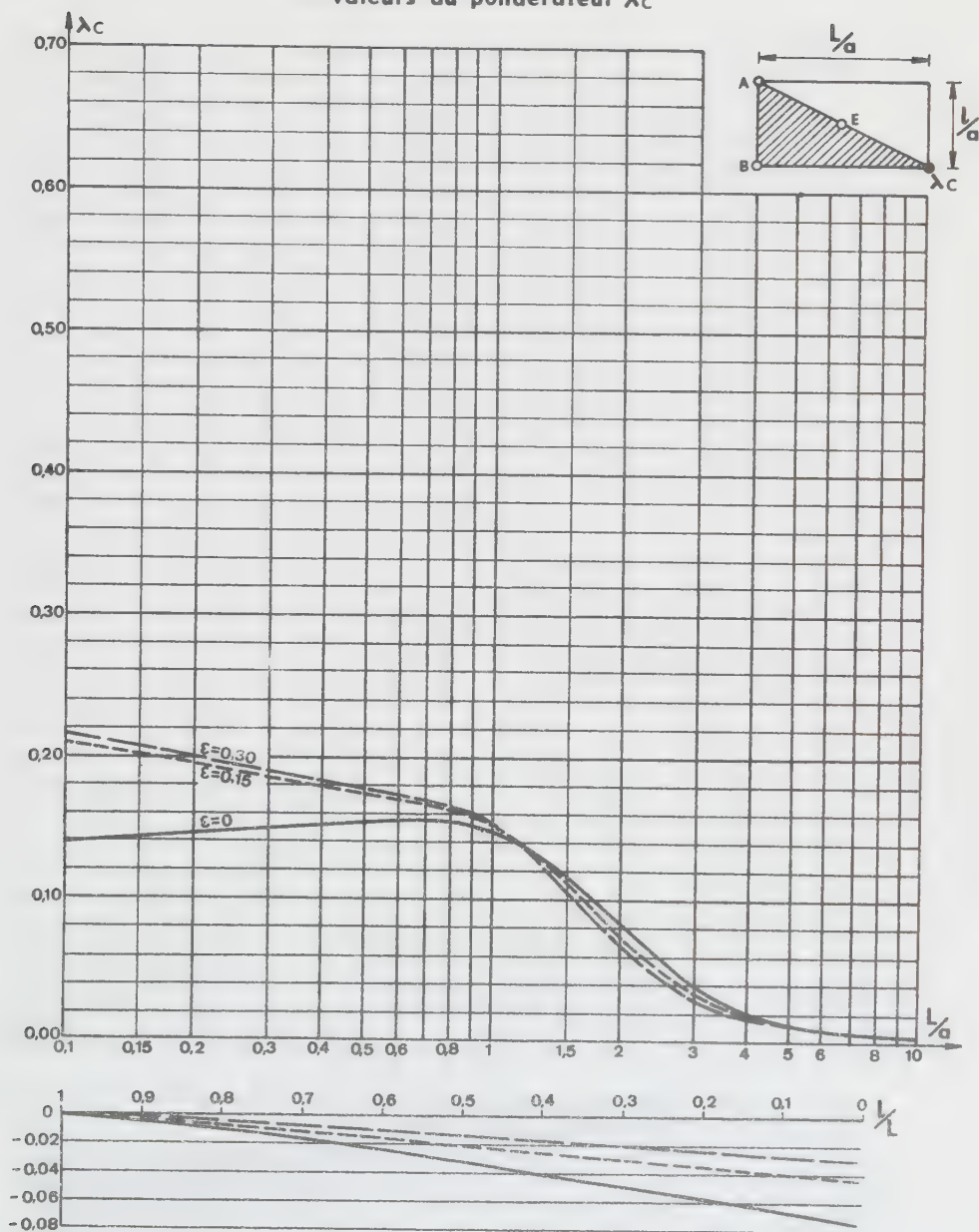
Valeurs du pondérateur λ_C 

Fig.30

Configuration triangulaire n°3

Valeurs du pondérateur λ_B

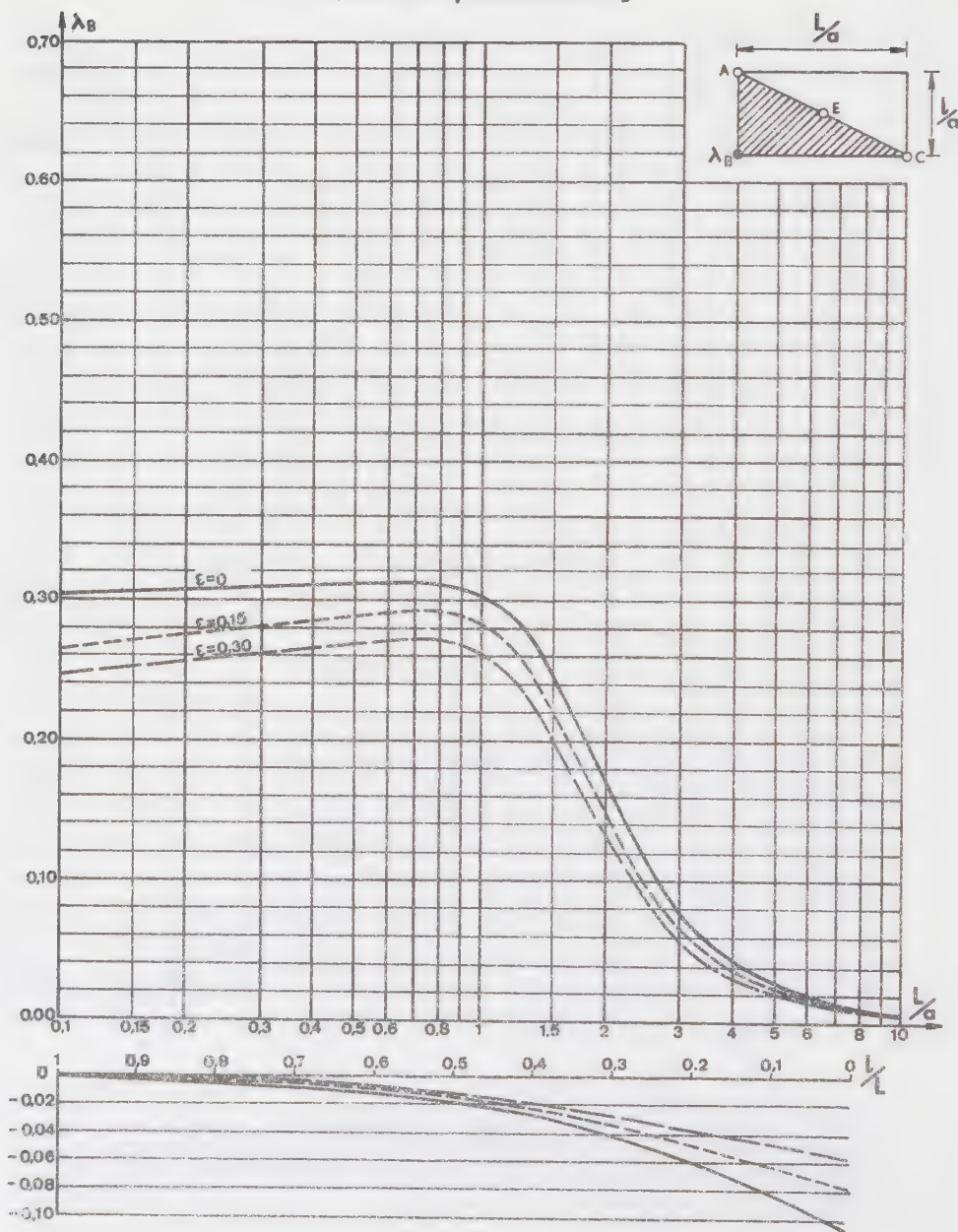


Fig.31

Configuration triangulaire n°3

Valeurs du pondérateur λ_A

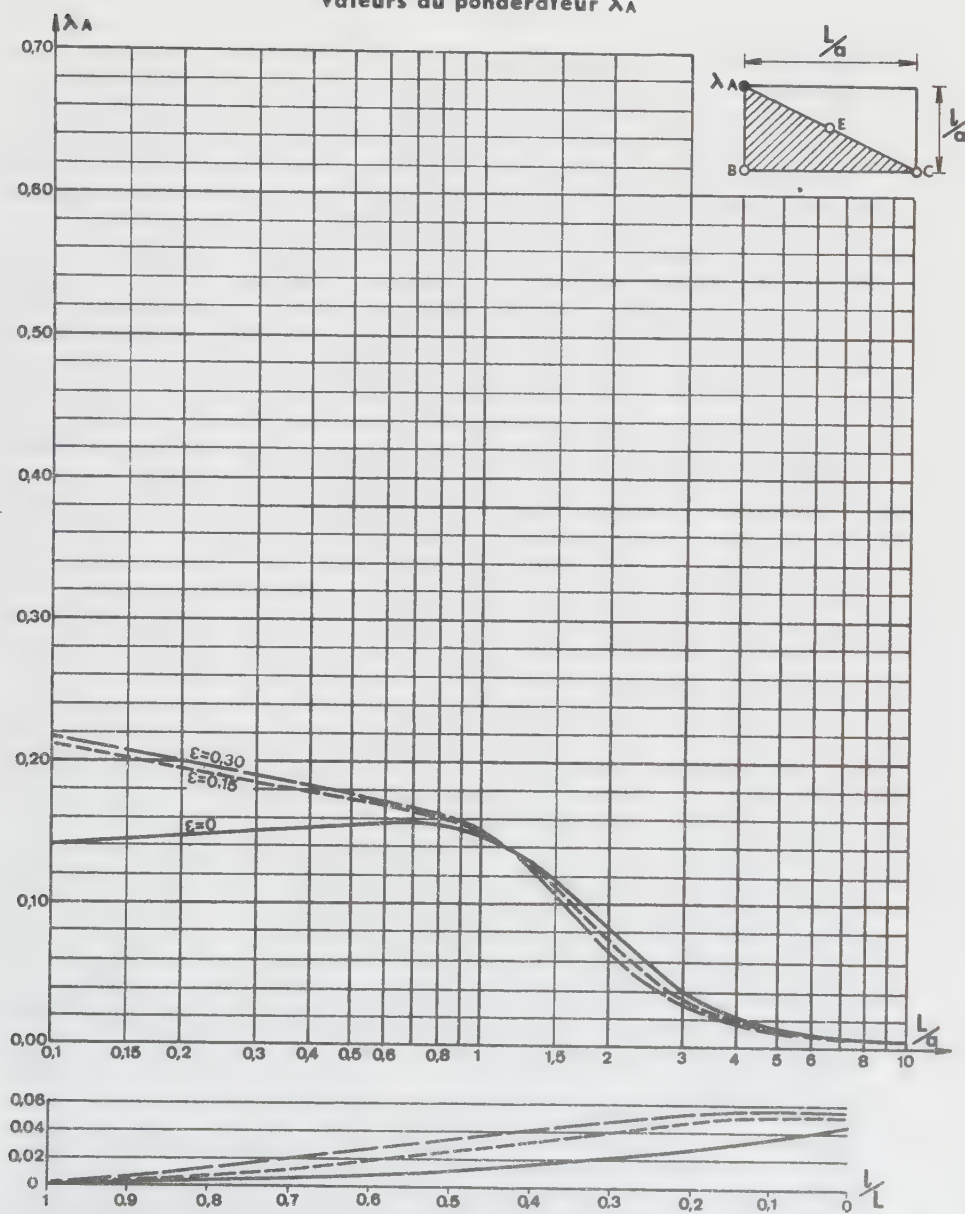


Fig.32

Configuration triangulaire n°3

Valeurs du pondérateur λ_E

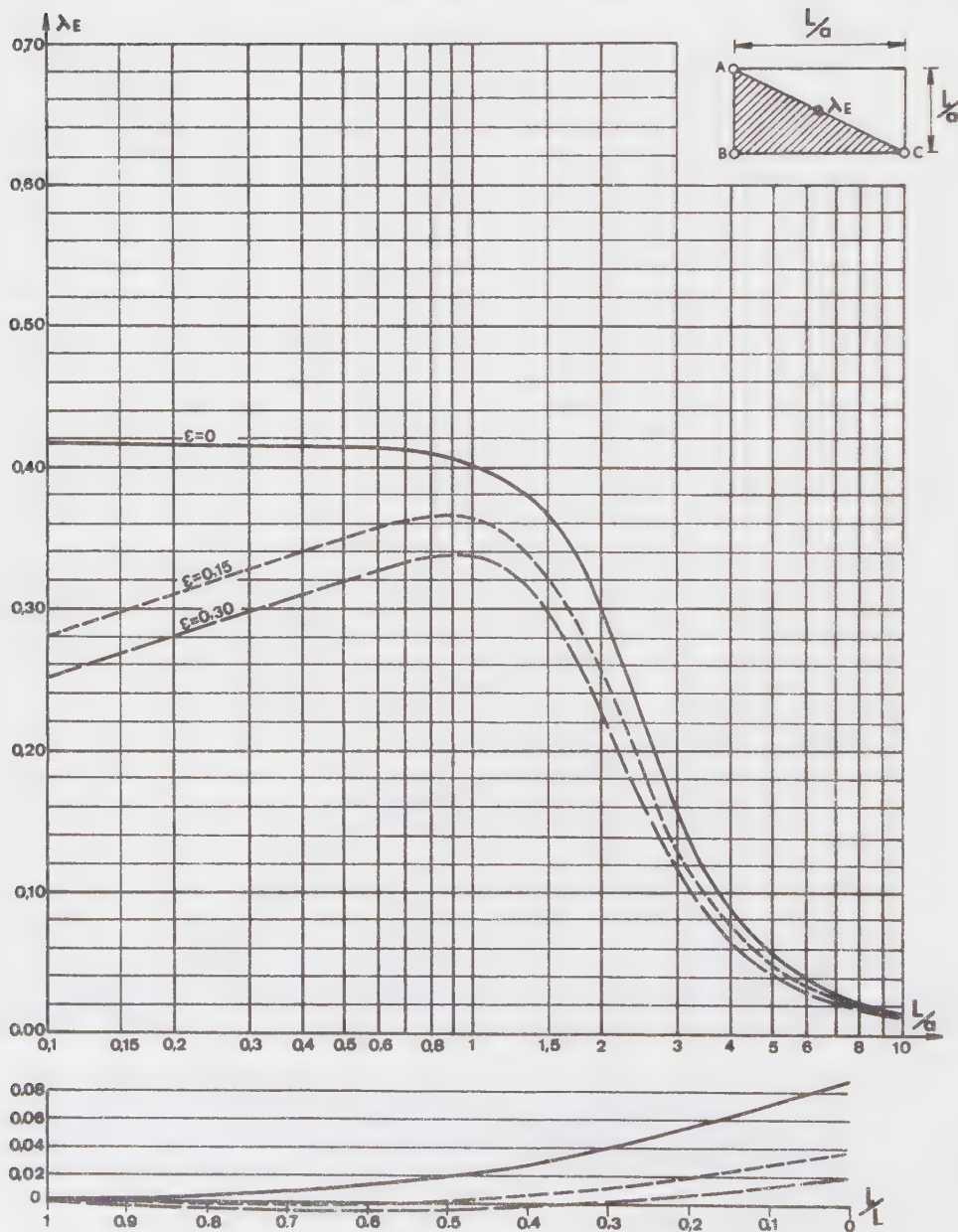


Fig. 33

Configuration rectangulaire n°4

Valeurs du pondérateur λ_C

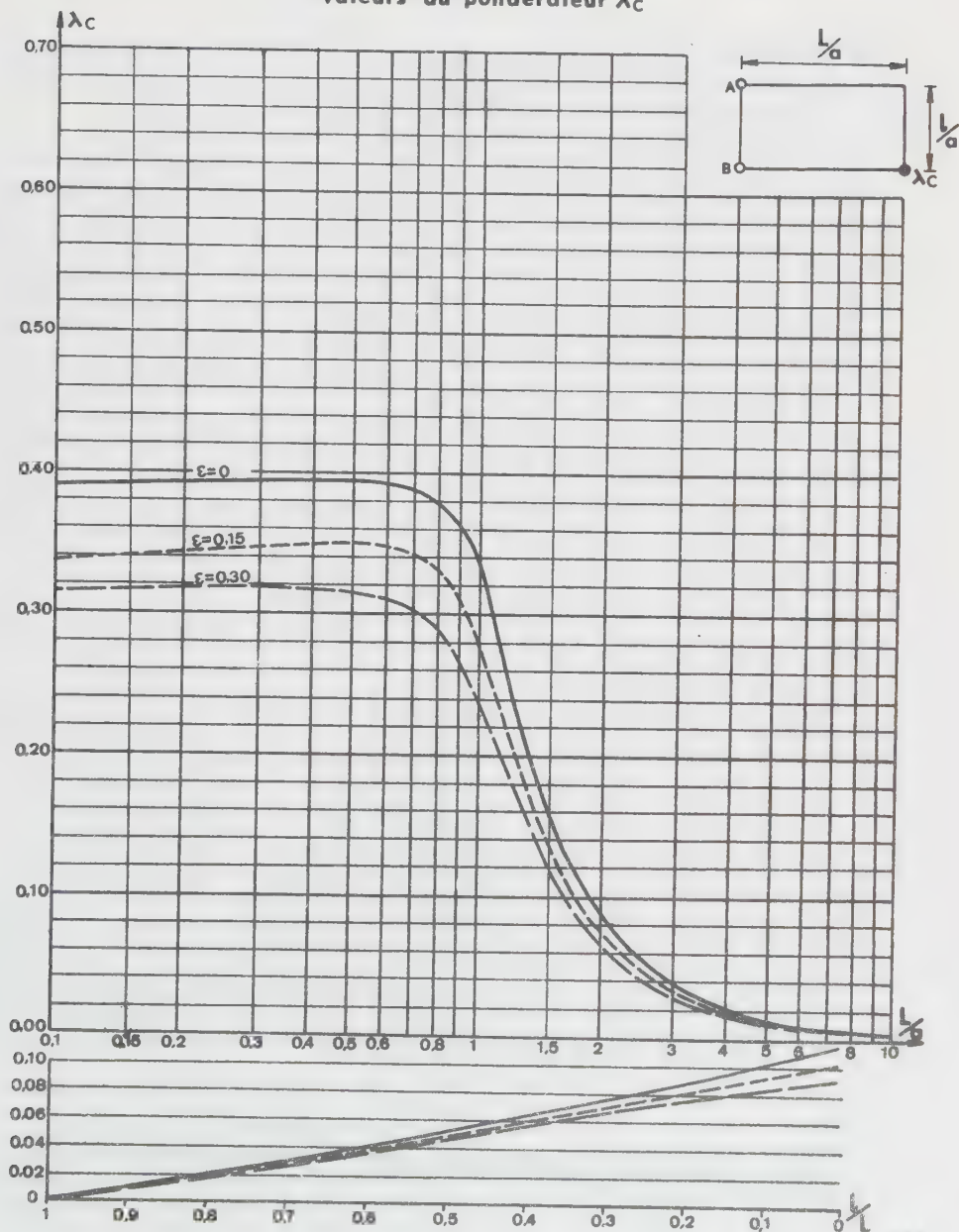


Fig.34

Configuration rectangulaire n°4

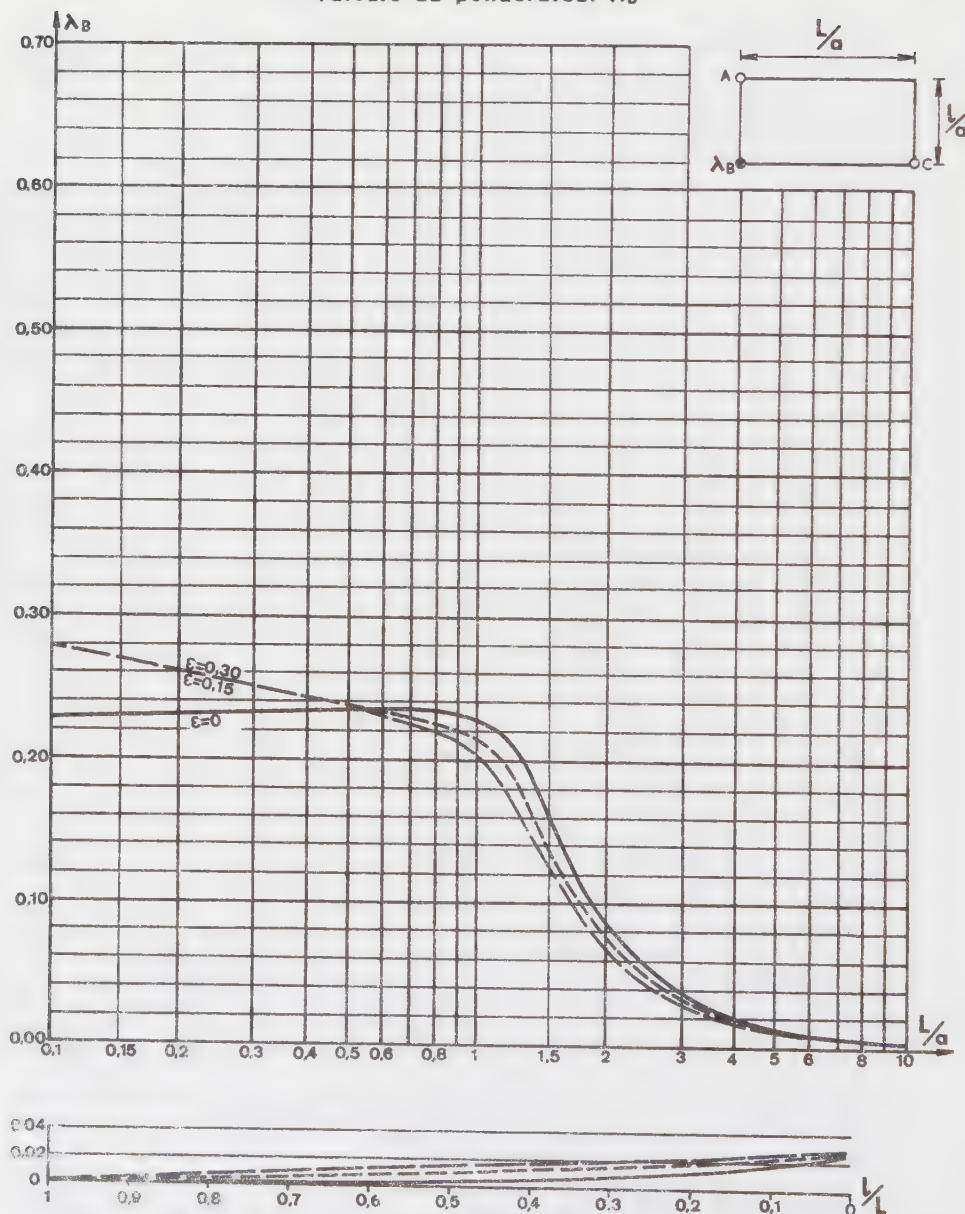
Valeurs du pondérateur λ_B 

Fig.35

Configuration rectangulaire n°4

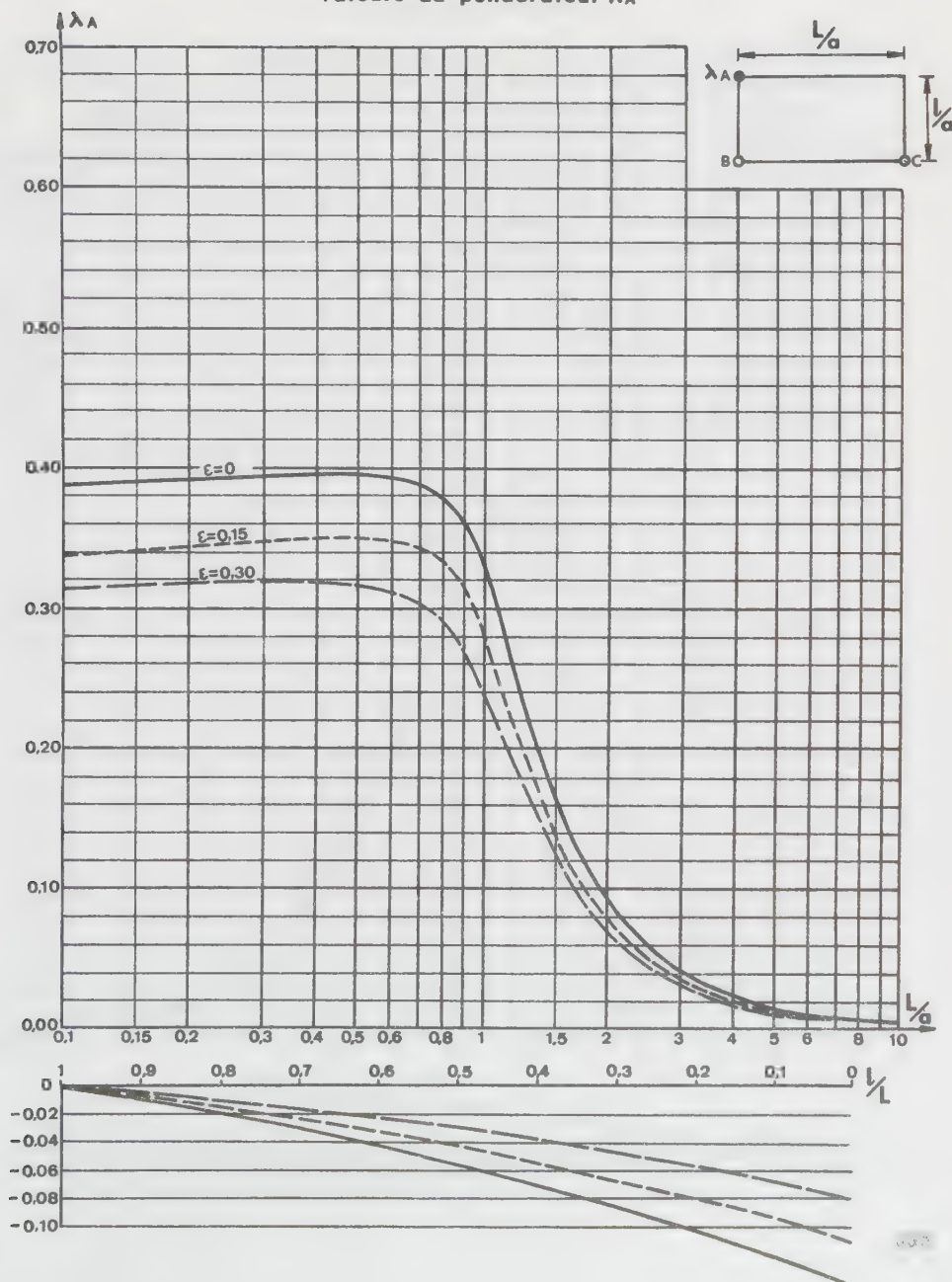
Valeurs du pondérateur λ_A 

Fig.36

Configuration triangulaire n°4

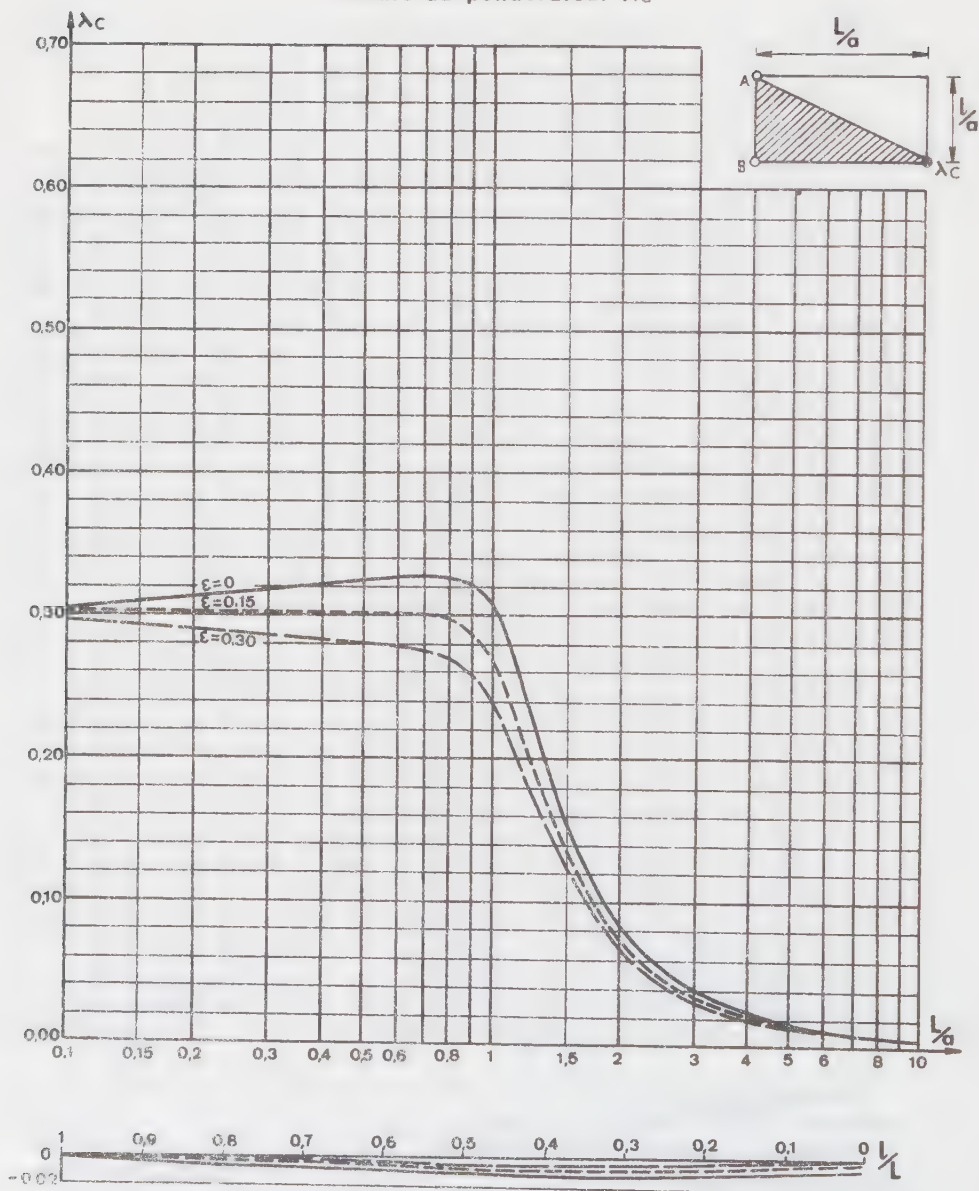
Valeurs du pondérateur λ_c 

Fig. 37

Configuration triangulaire n°4

Valeurs du pondérateur λ_B

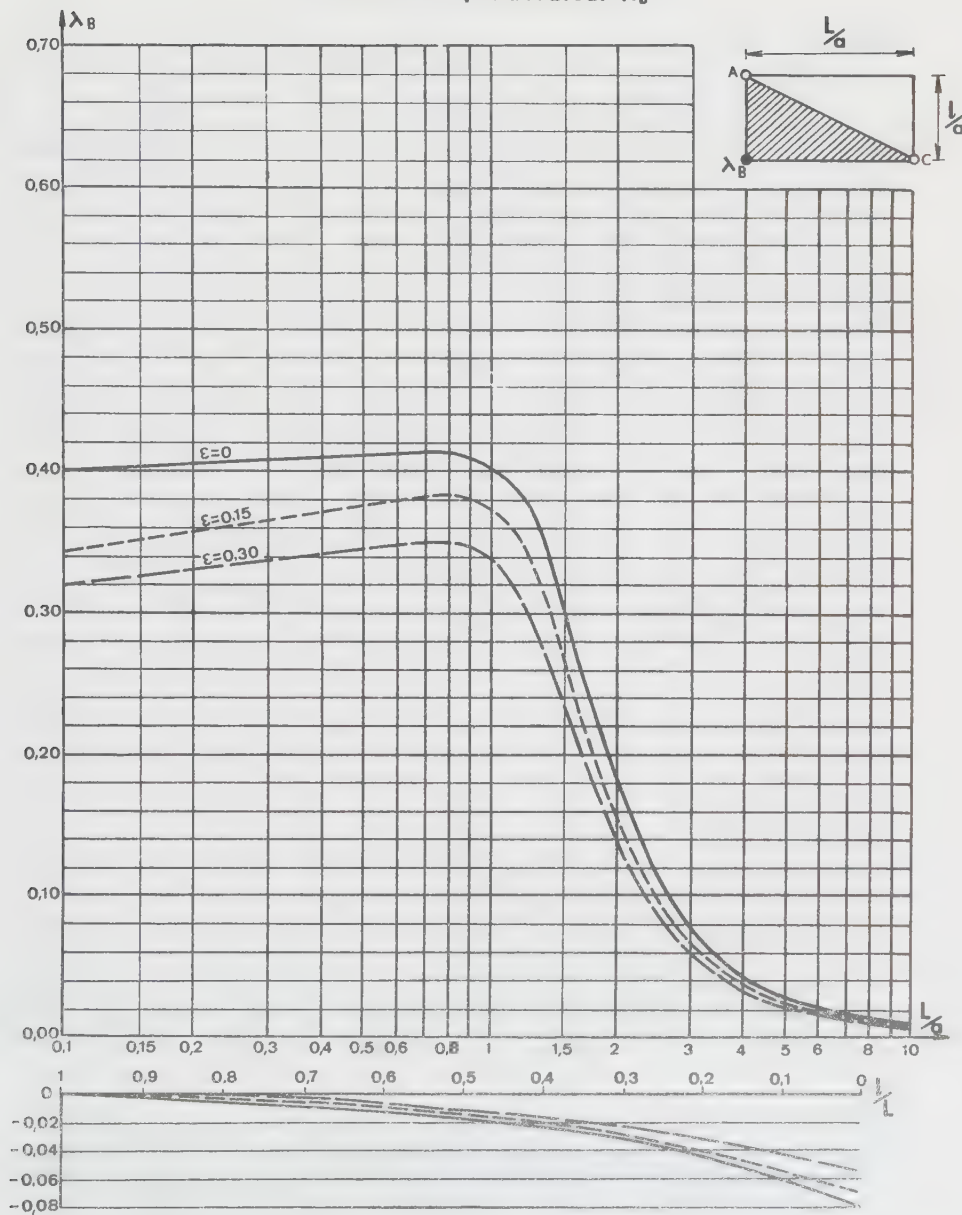


Fig.38

Configuration triangulaire n°4

Valeurs du pondérateur λ_A

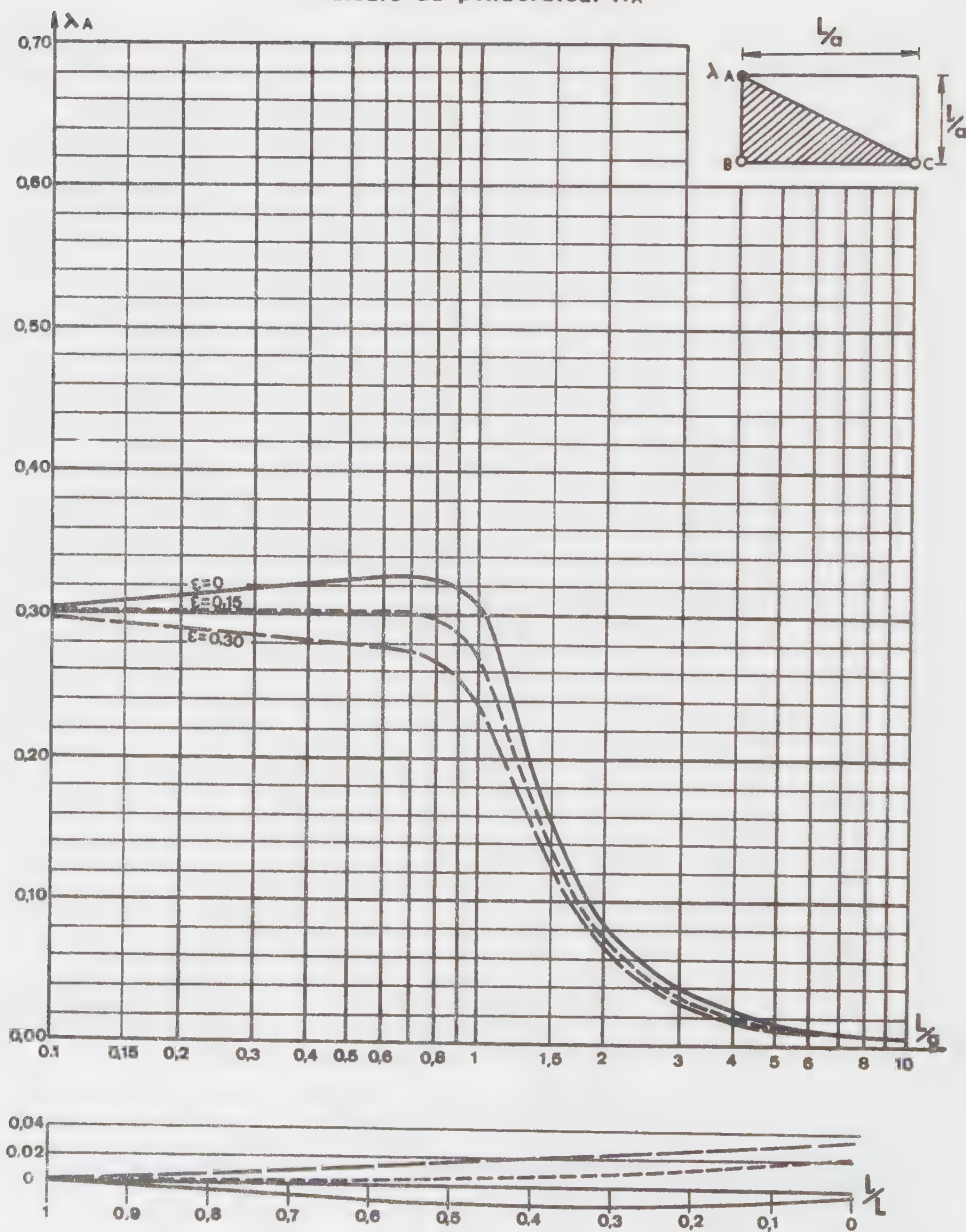


Fig.39

Configuration rectangulaire n°5

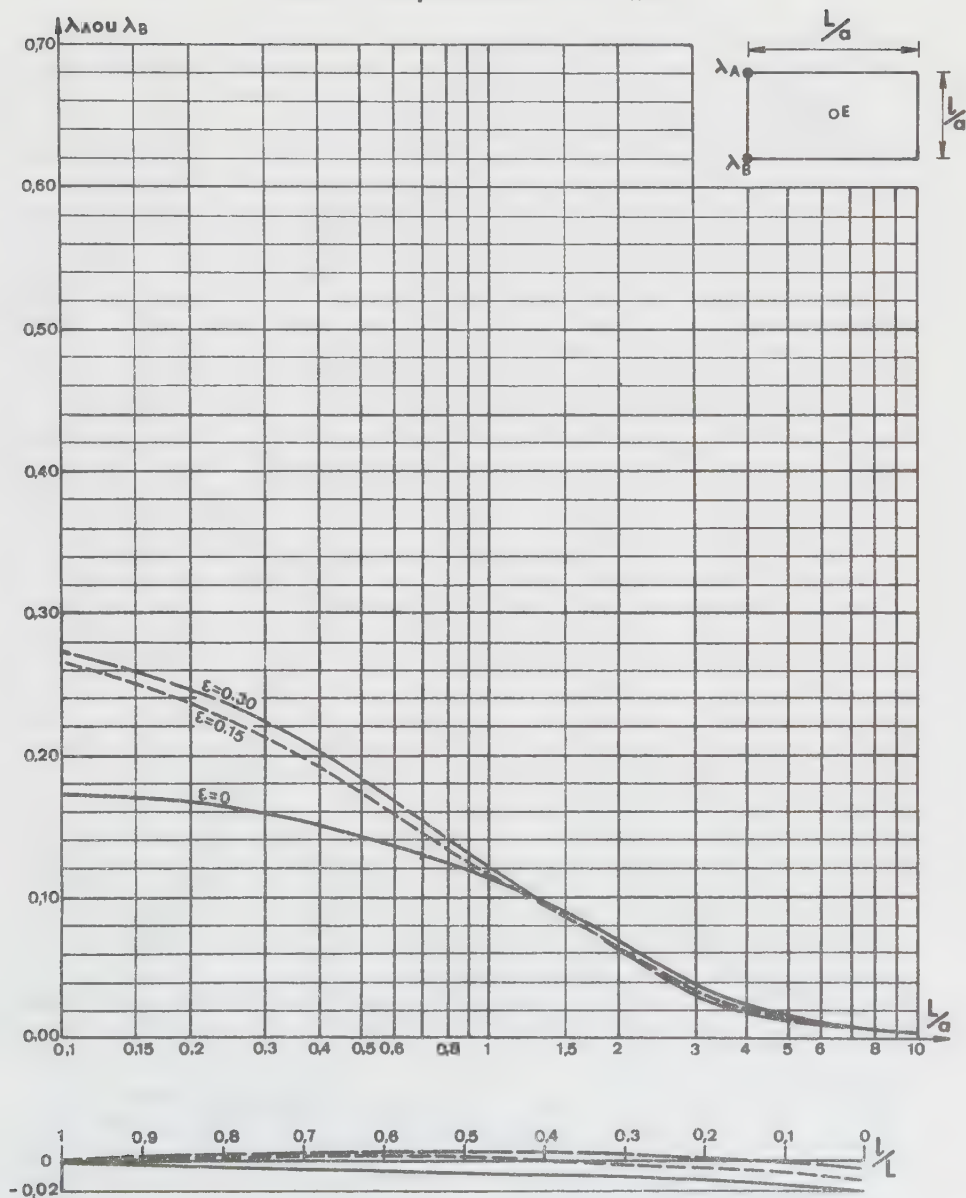
Valeurs des pondérateurs λ (λ_A ou λ_B)

Fig.40

Configuration rectangulaire n°5

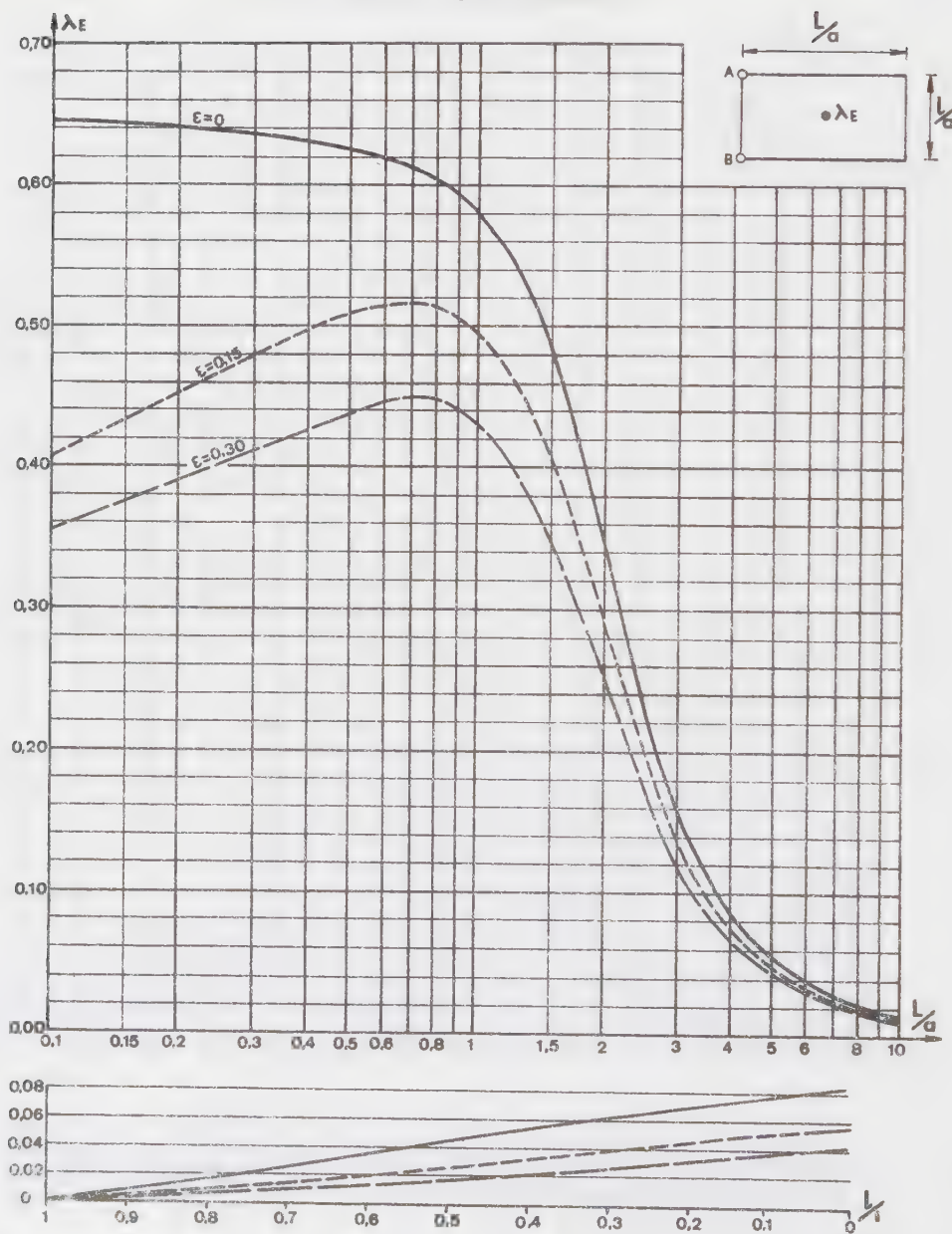
Valeurs du pondérateur λ_E 

Fig. 41

Configuration triangulaire n°5

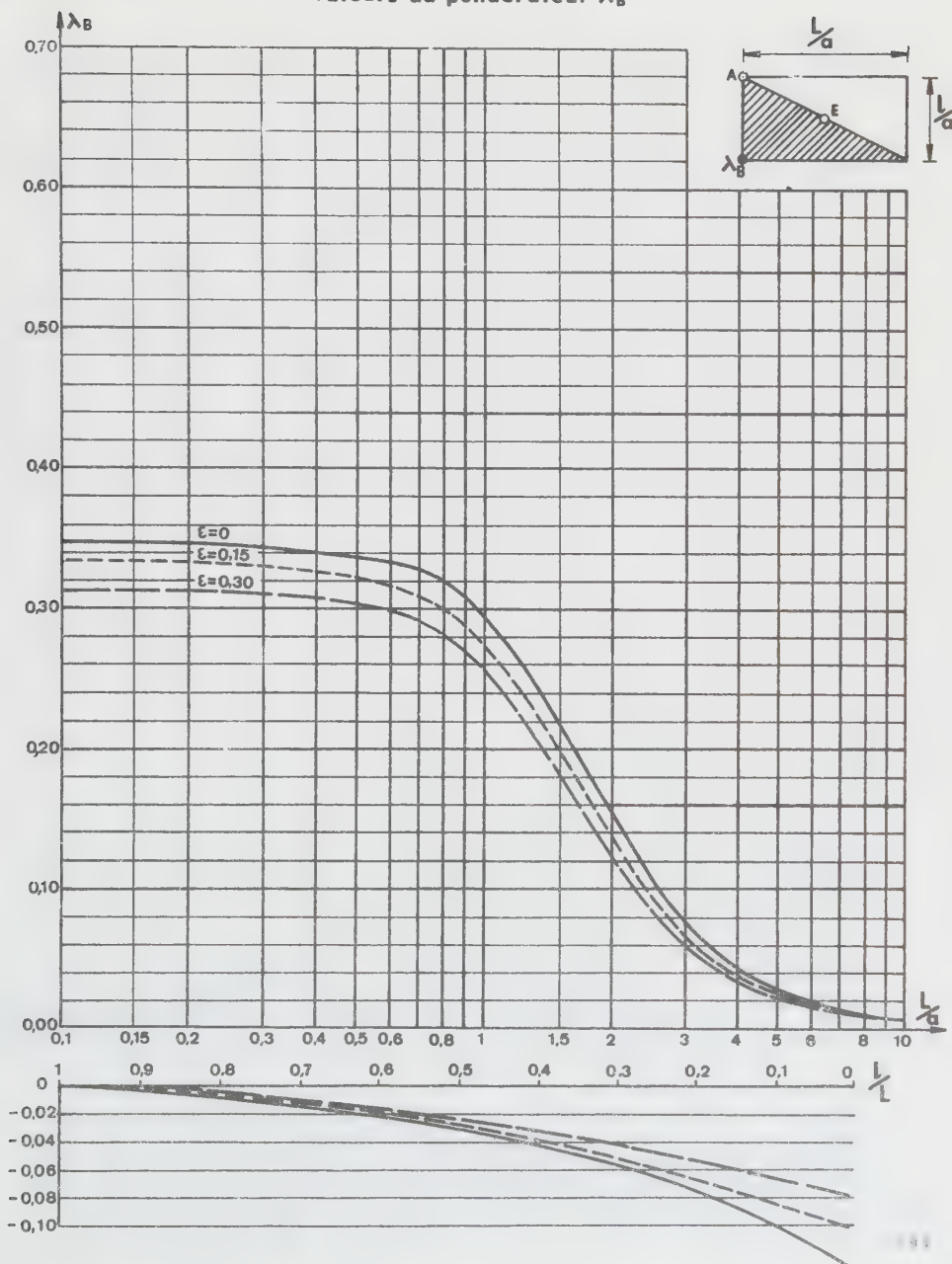
Valeurs du pondérateur λ_B 

Fig. 42

Configuration triangulaire n°5

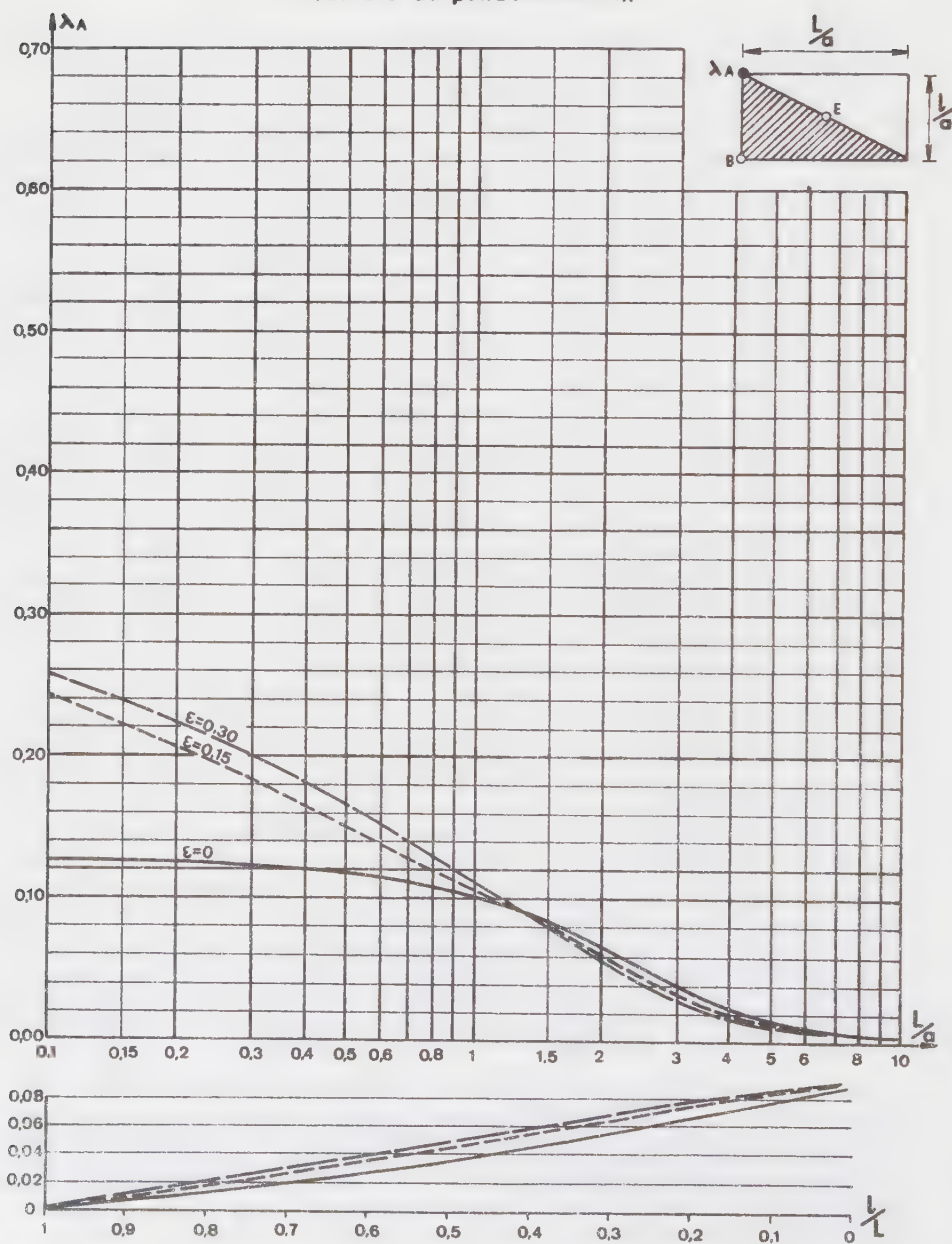
Valeurs du pondérateur λ_A 

Fig.43

Configuration triangulaire n°5

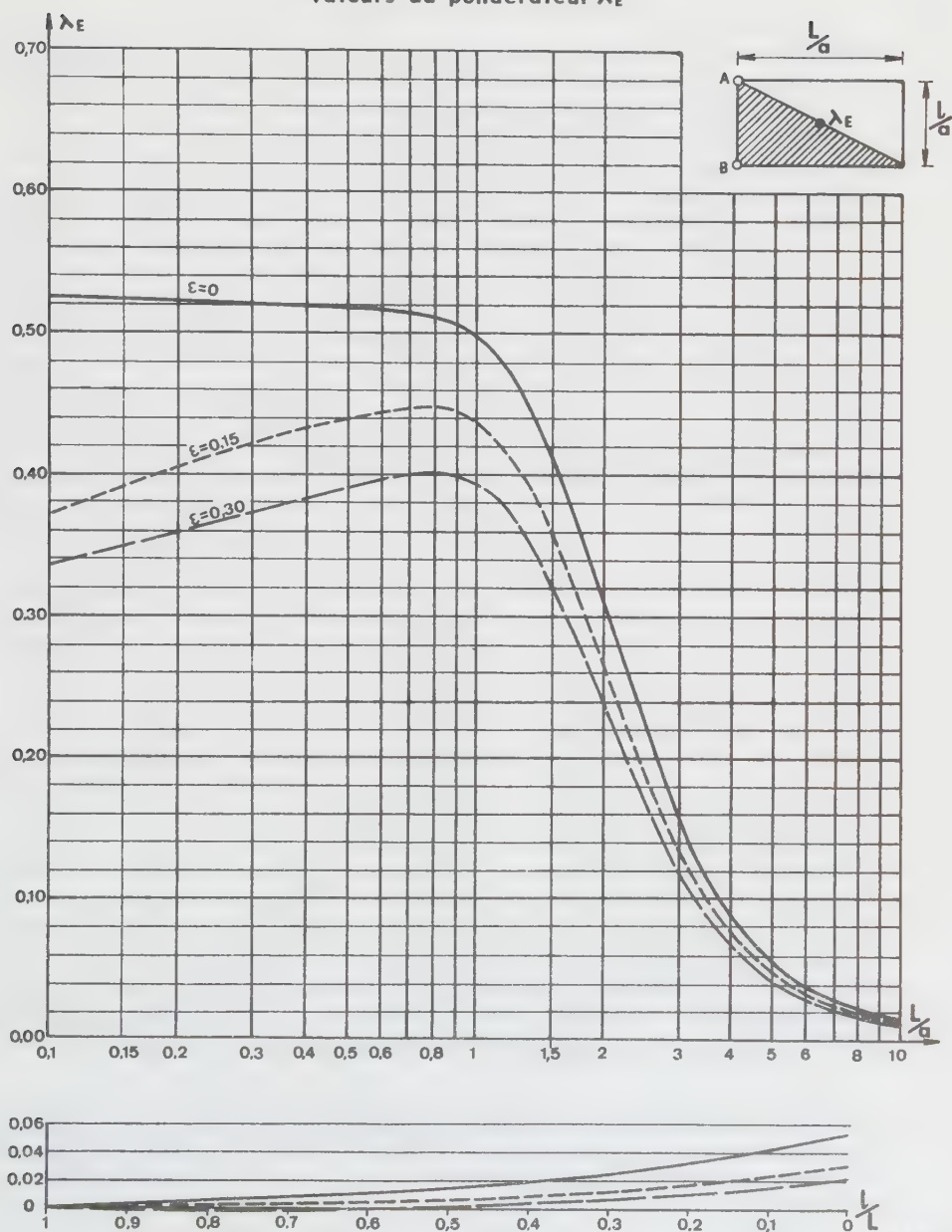
Valeurs du pondérateur λ_E 

Fig.44

Configuration rectangulaire n°6

Valeurs des pondérateurs λ (λ_A ou λ_B)

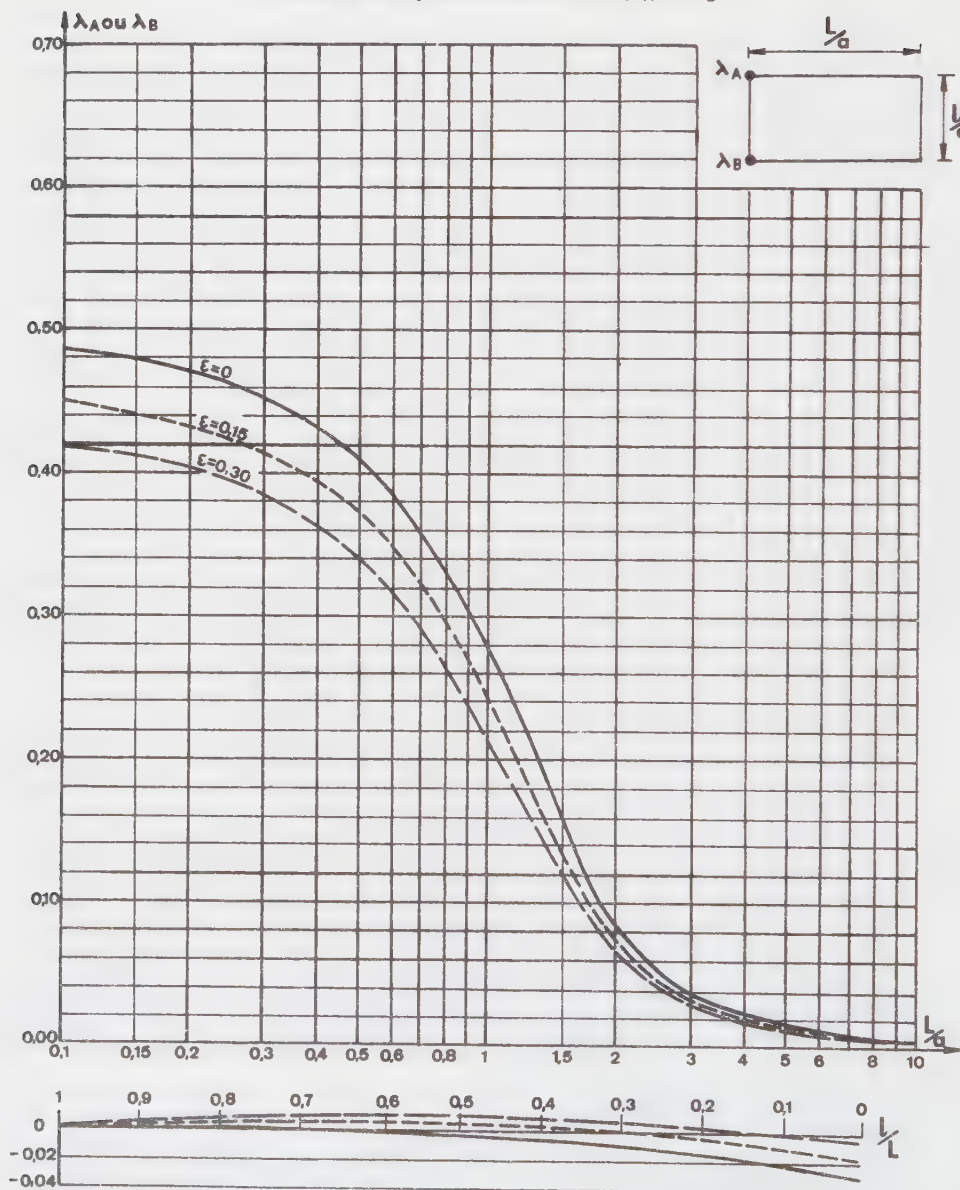


Fig.45

Configuration triangulaire n°6

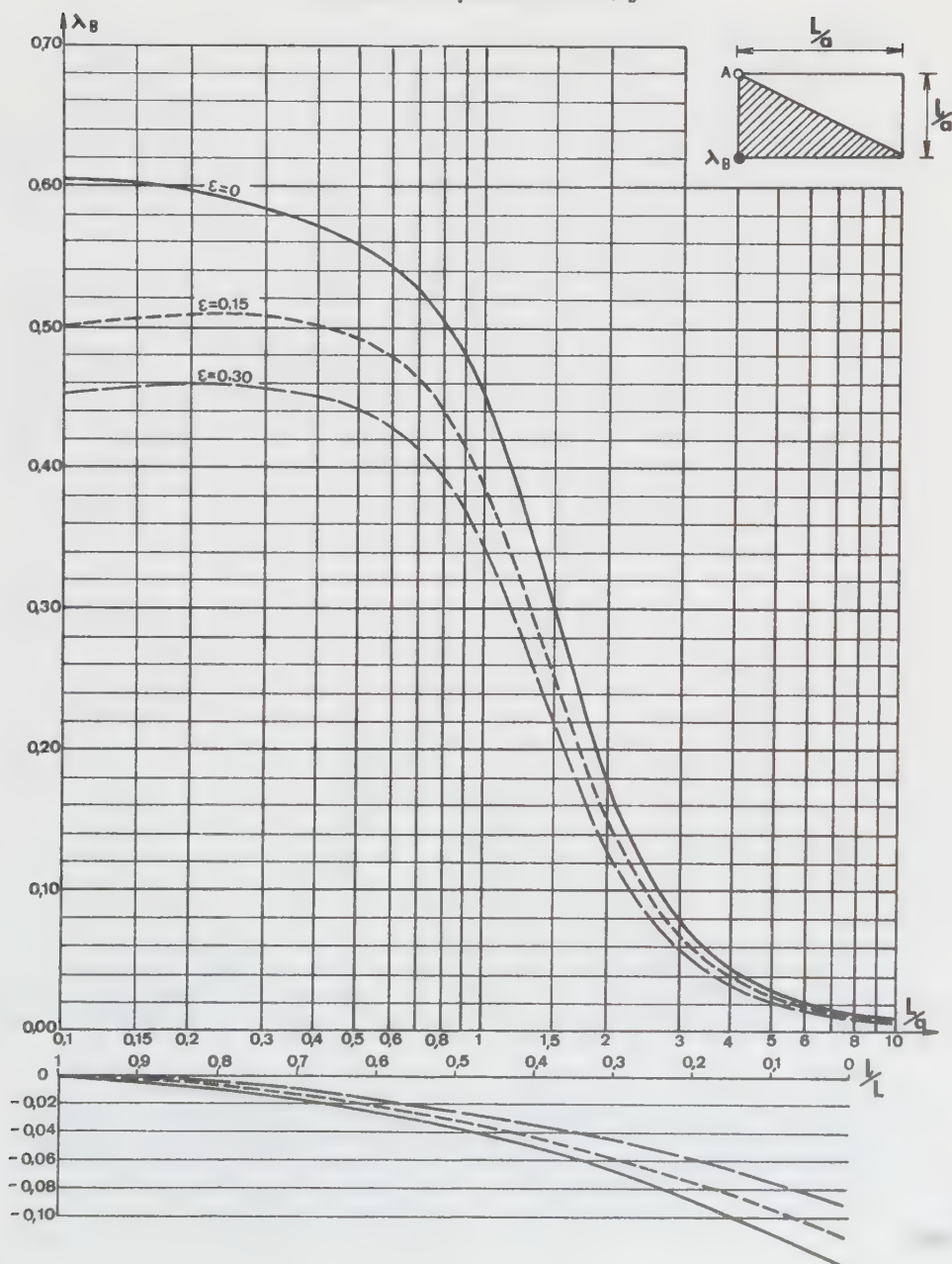
Valeurs du pondérateur λ_B 

Fig. 46

Configuration triangulaire n°6

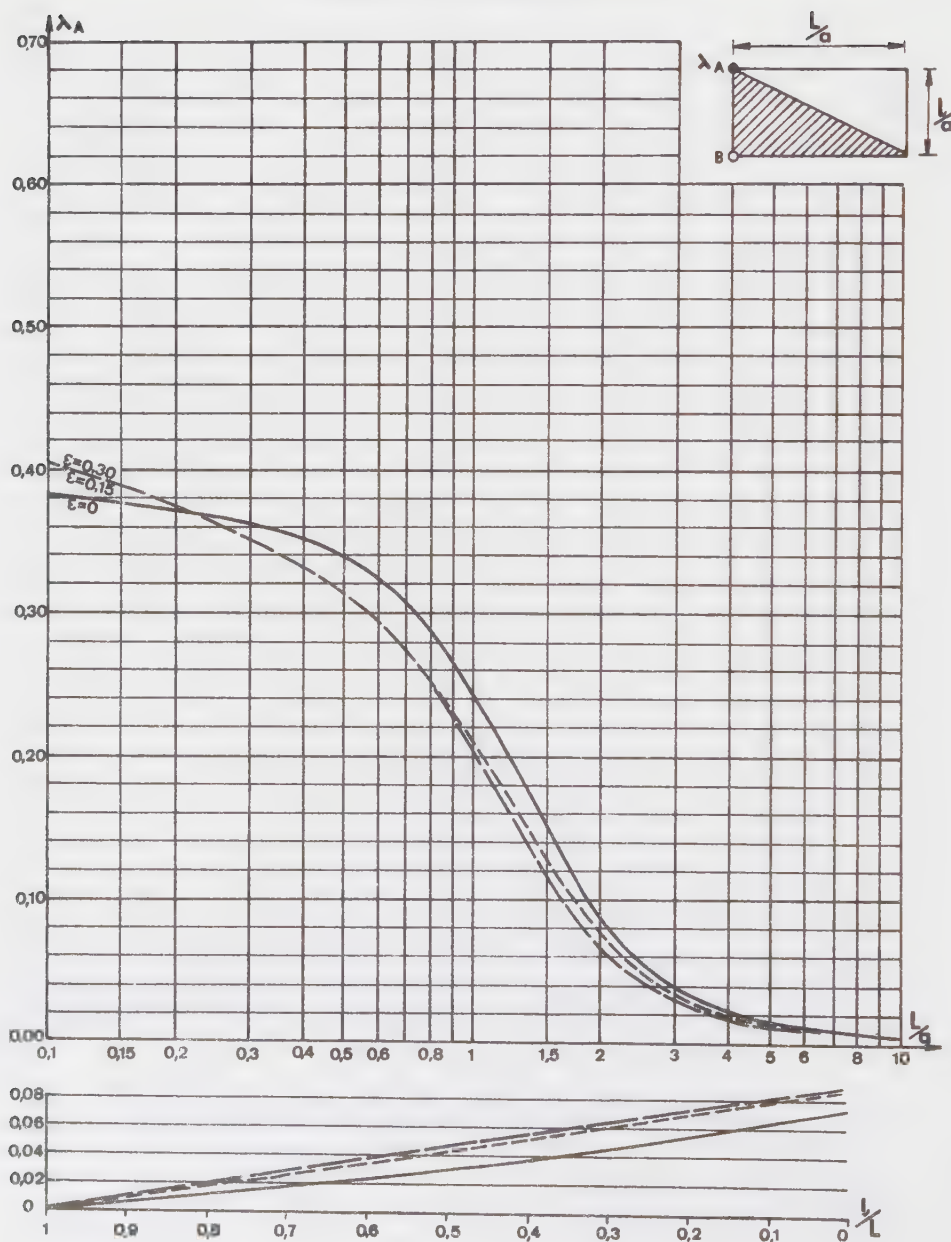
Valeurs du pondérateur λ_A 

Fig.47

Configuration rectangulaire n°7

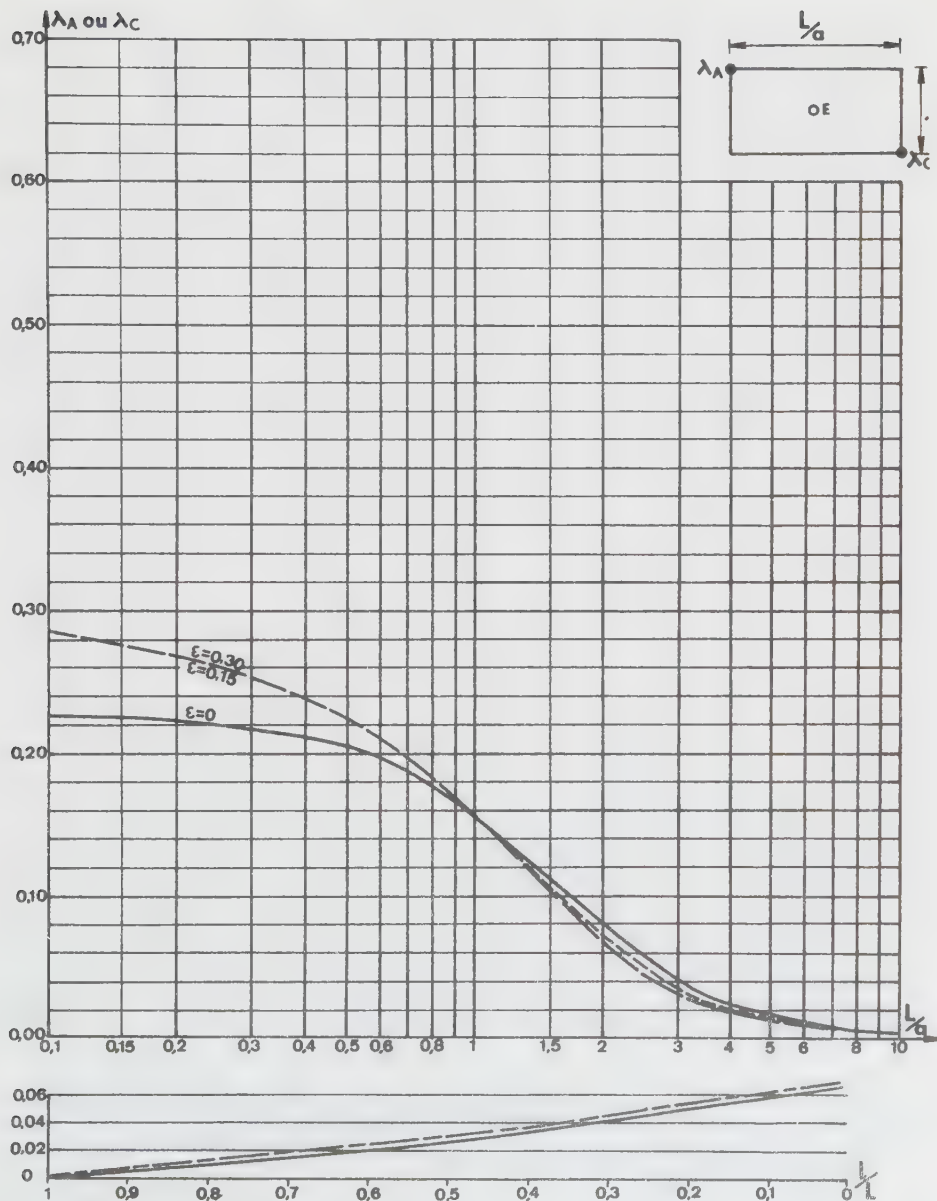
Valeurs des pondérateurs λ (λ_A ou λ_C)

Fig.48

Configuration rectangulaire n°7

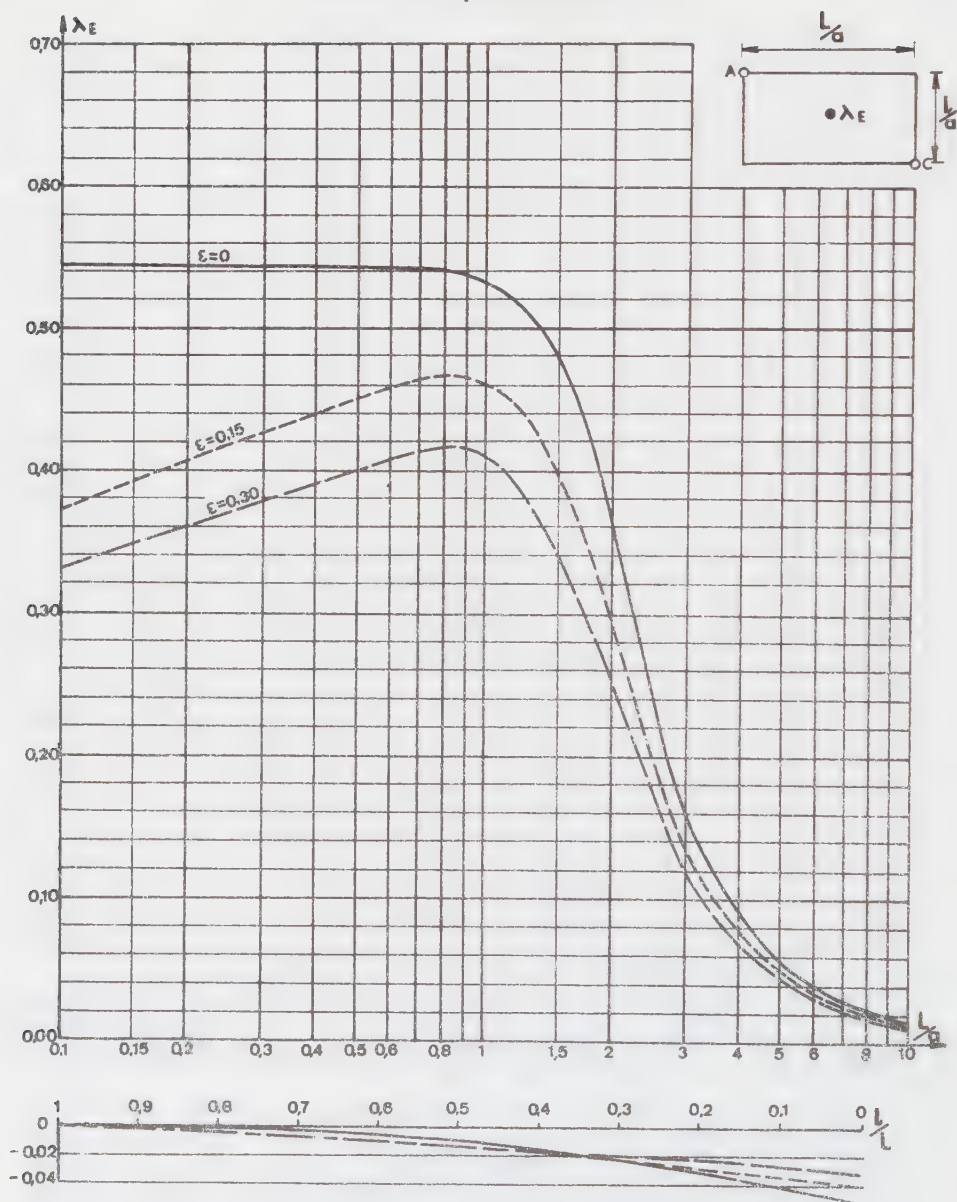
Valeurs du pondérateur λ_ε 

Fig.49

Configuration triangulaire n°7

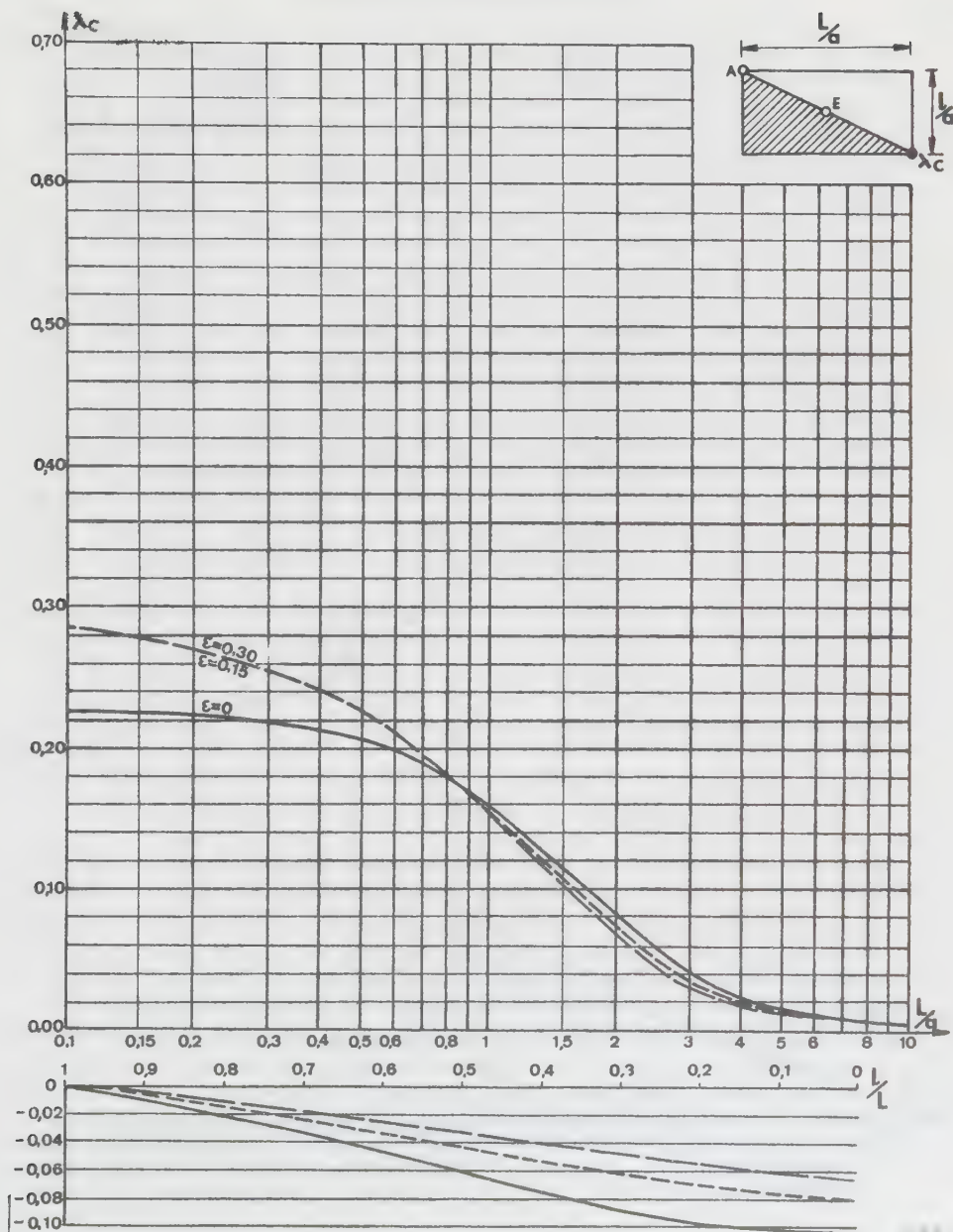
Valeurs du pondérateur λ_C 

Fig.50

Configuration triangulaire n°7

Valeurs du pondérateur λ_A

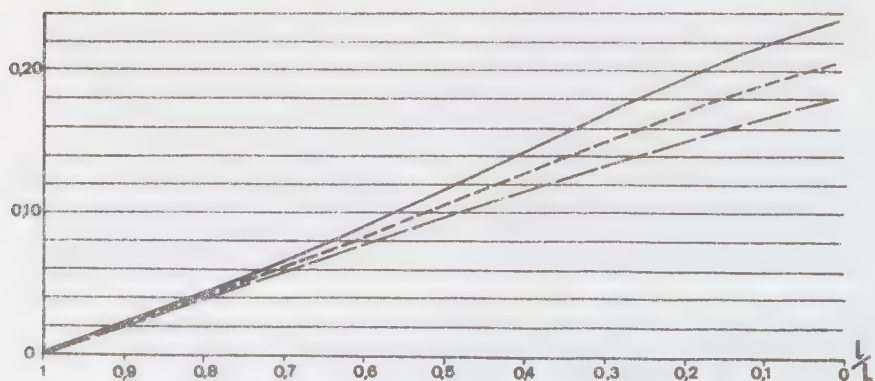
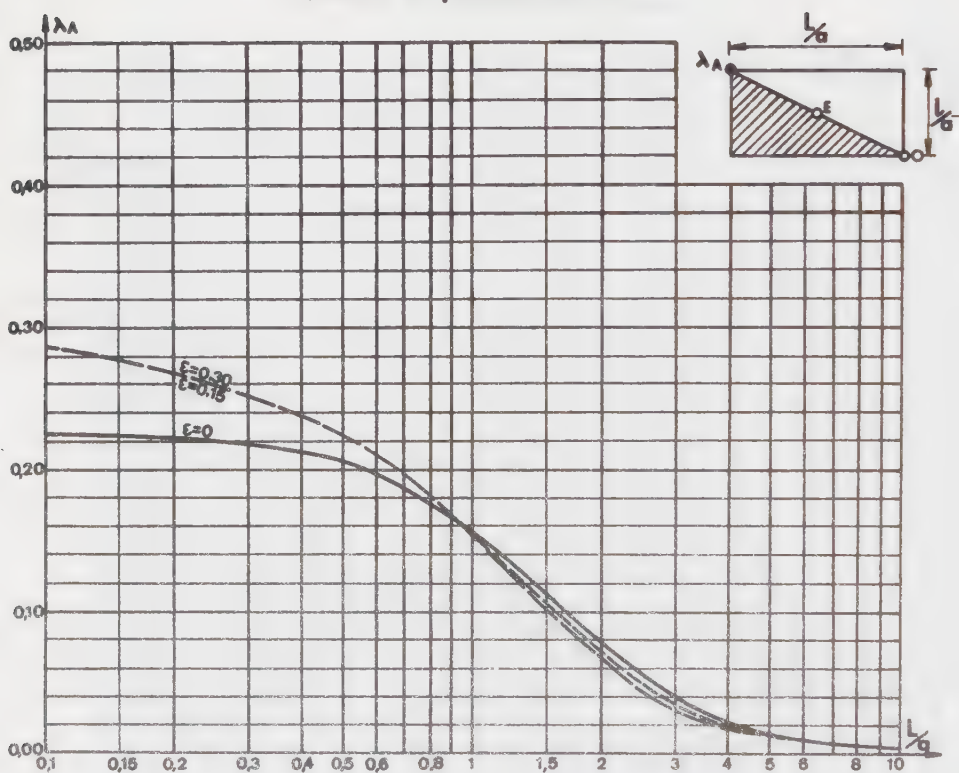


Fig. 51

Configuration triangulaire n°7

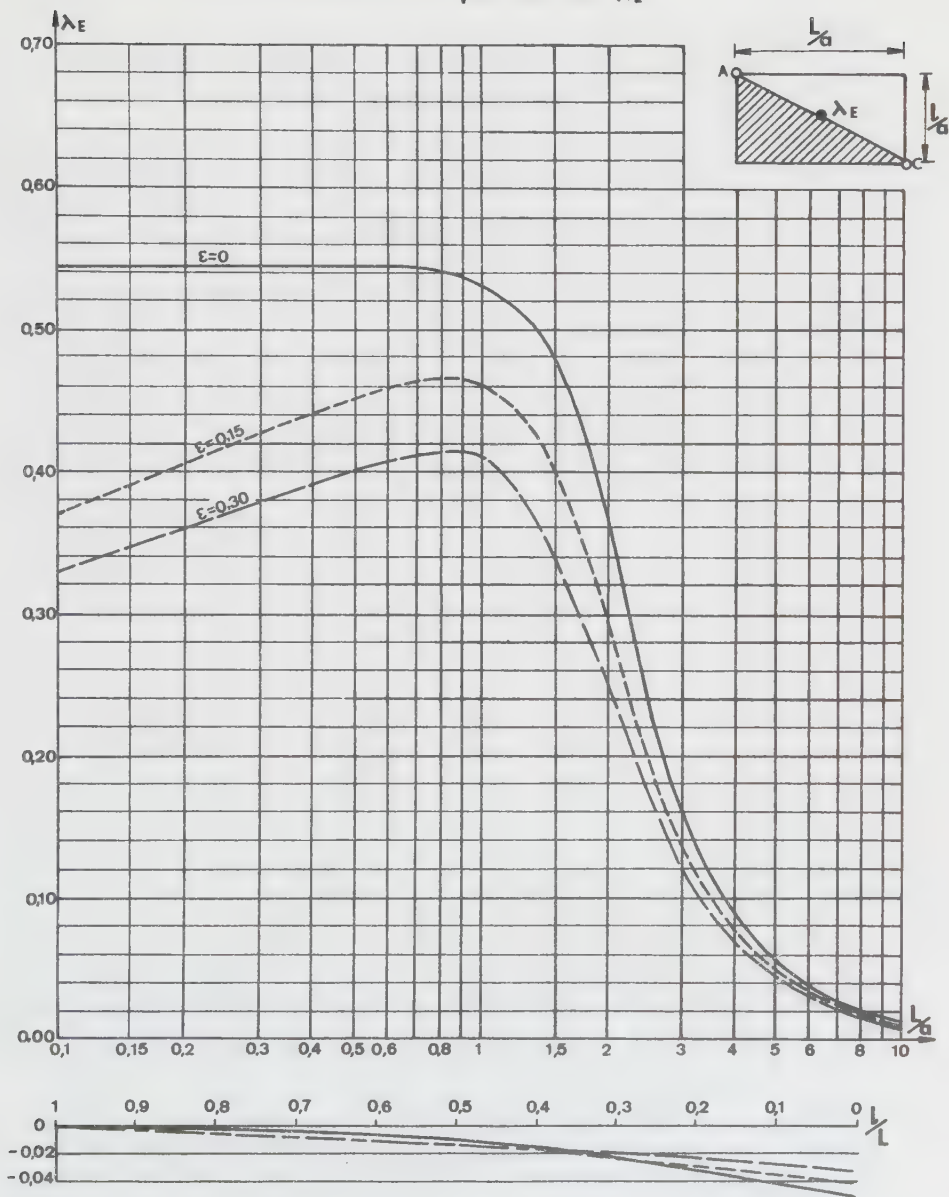
Valeurs du pondérateur λ_E 

Fig. 52

Configuration rectangulaire n° 8

Valeurs des pondérateurs λ (λ_A ou λ_C)

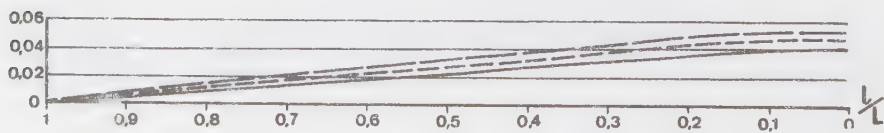
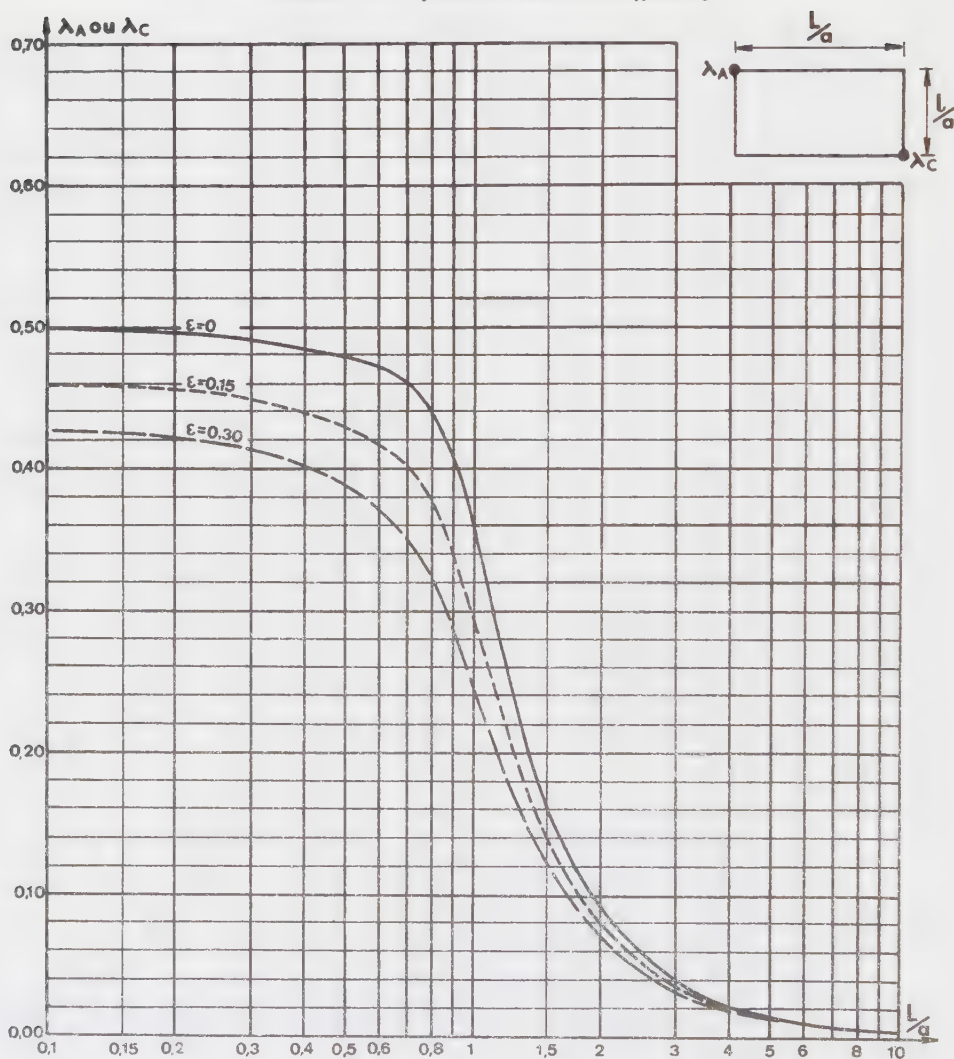


Fig. 53

Configuration triangulaire n°8

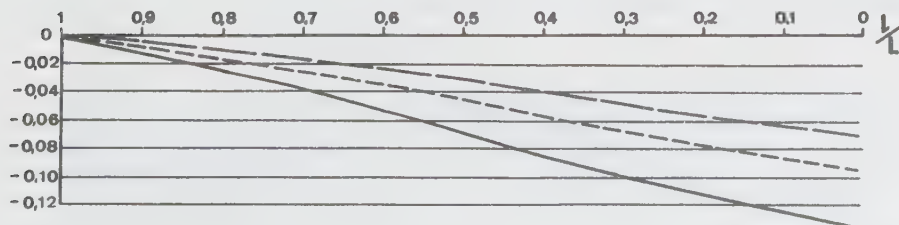
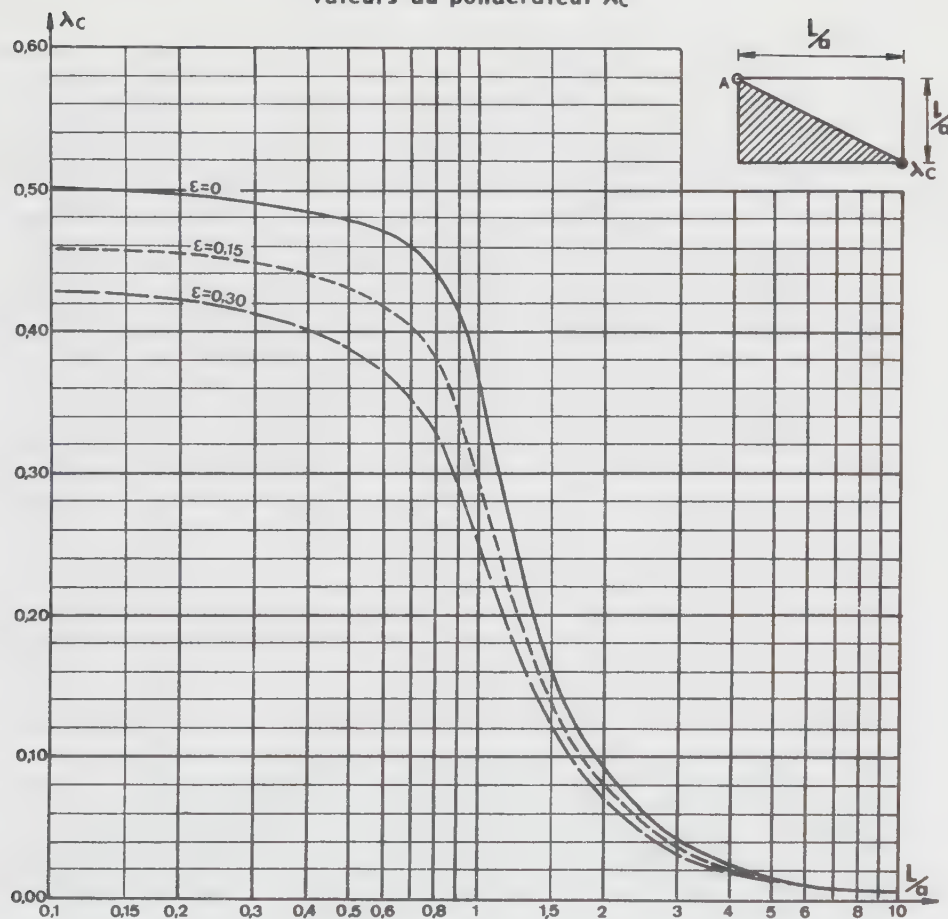
Valeurs du pondérateur λ_c 

Fig.54

Configuration triangulaire n°8

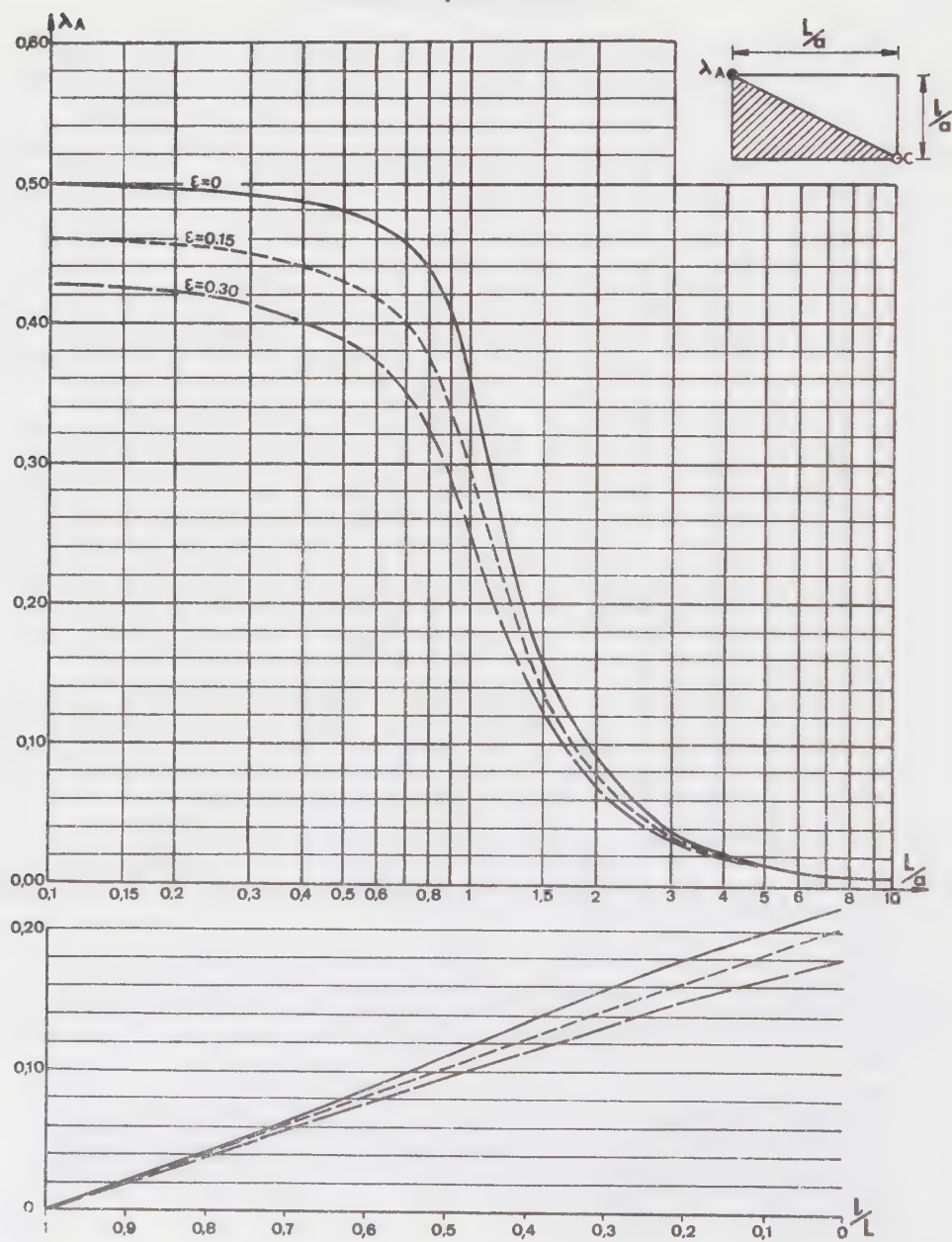
Valeurs du pondérateur λ_A 

Fig.55

Configuration rectangulaire n°9

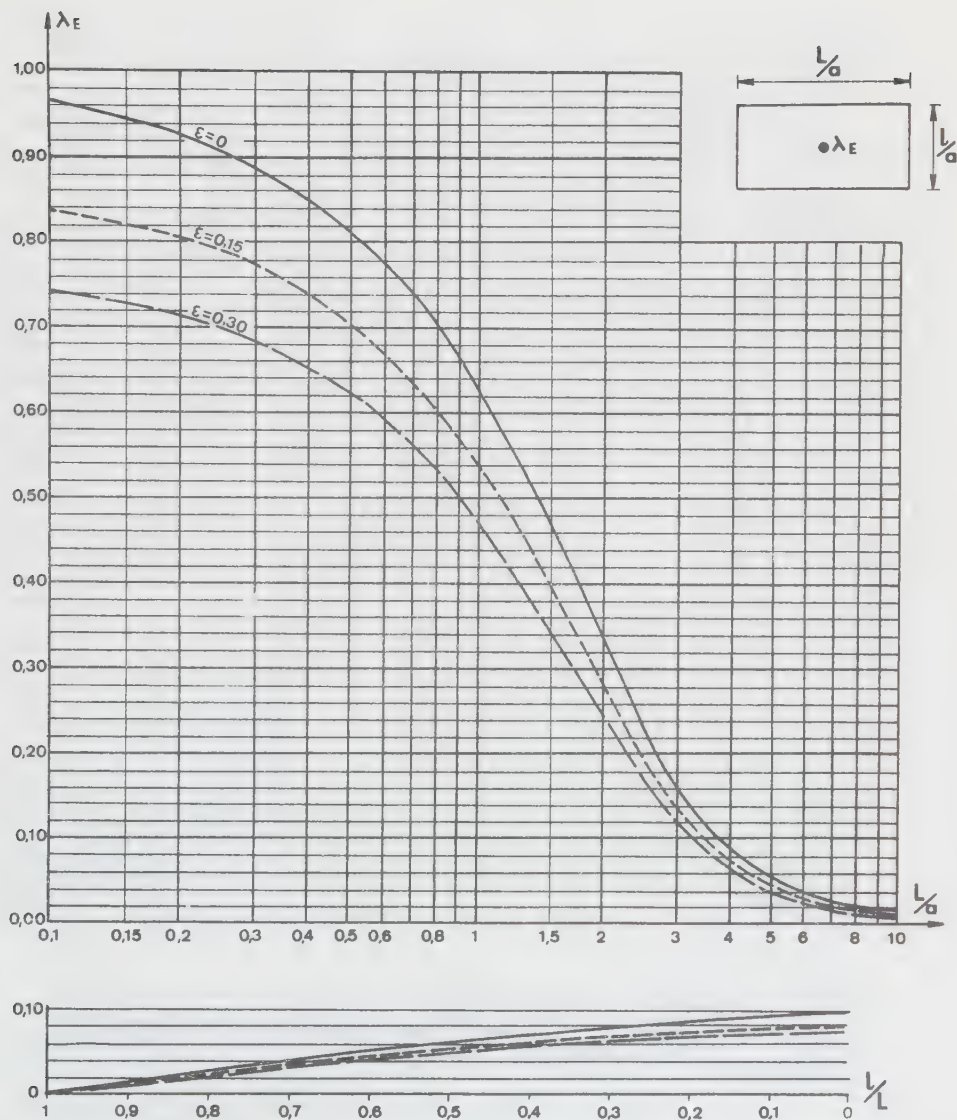
Valeurs du pondérateur λ_E 

Fig. 56

Configuration triangulaire n°9

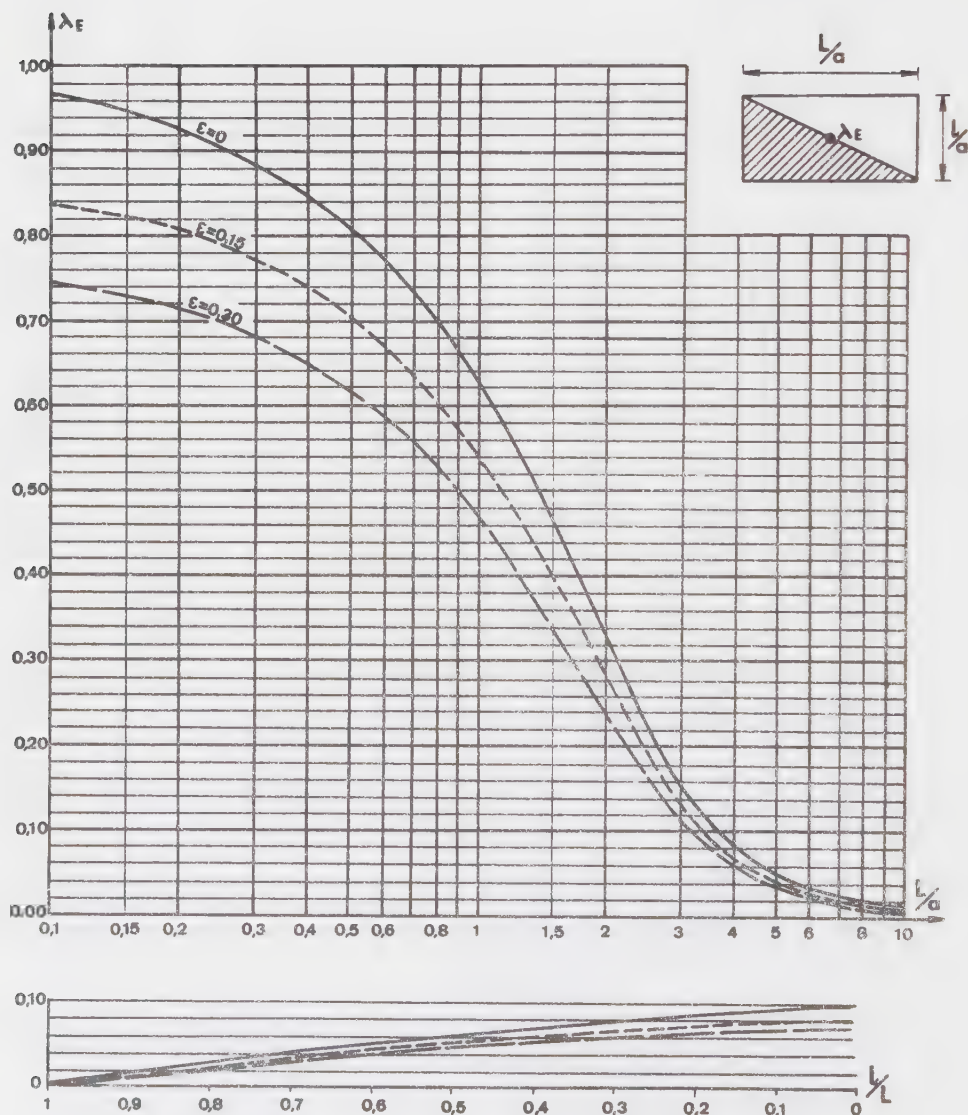
Valeurs du pondérateur λ_E 

Fig.57

Configuration rectangulaire n°9 bis

Valeurs du pondérateur λ_c

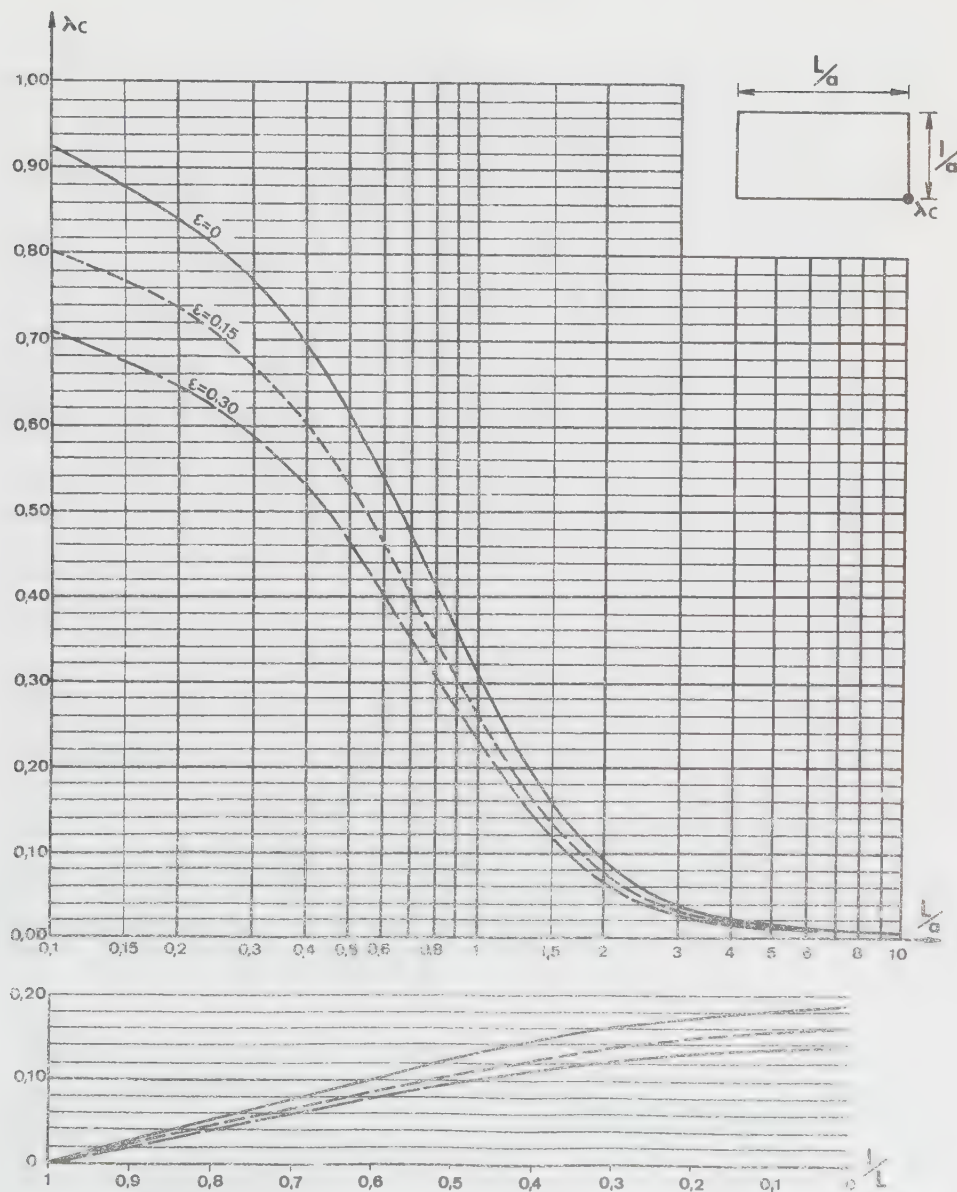
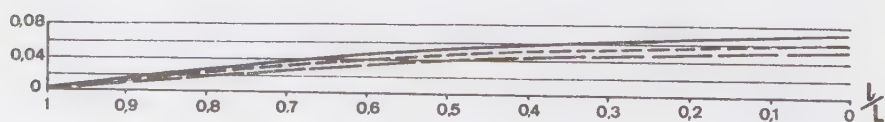
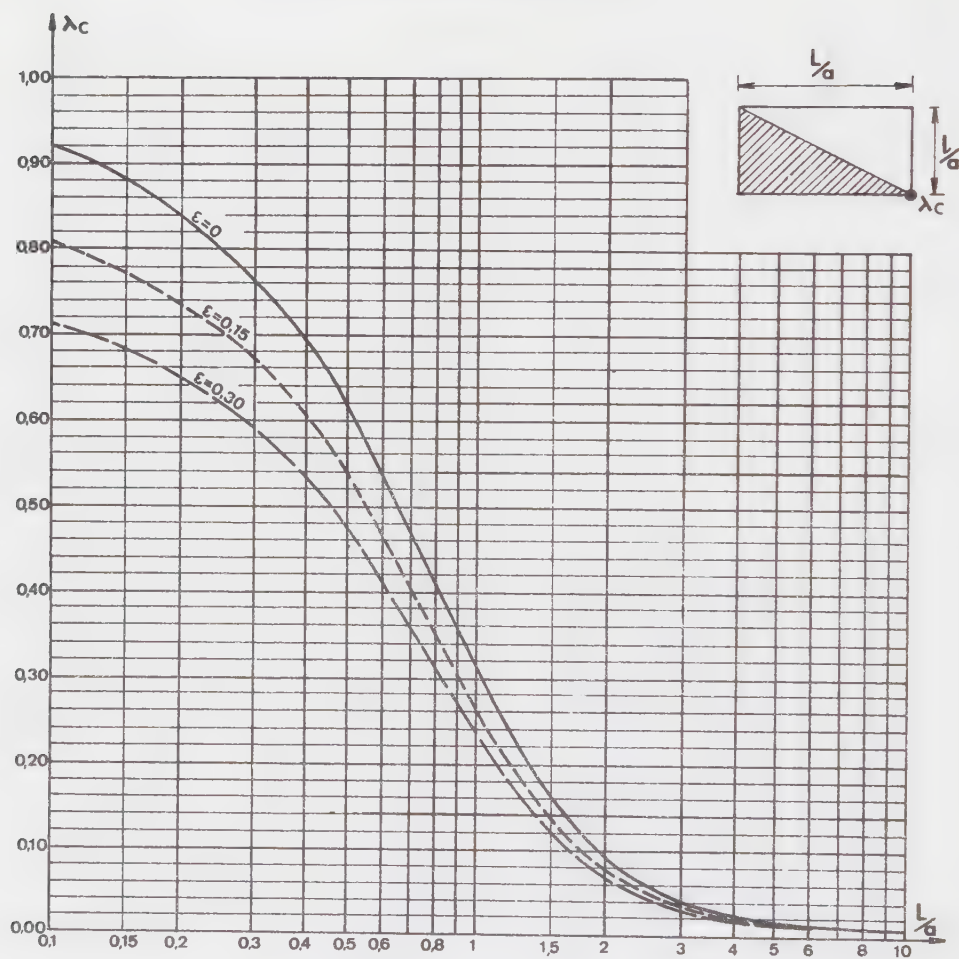


Fig.58

Configuration triangulaire n°9 bis

Valeurs du pondérateur λ_c 

Variances de krigeage par mailles et panneaux réguliers

Compte tenu des hypothèses émises pour la construction des abaques précédents, la détermination des variances de krigeage correspondantes est très simple et ne fera pas l'objet d'une tabulation spéciale.

Quelle que soit la taille de la maille, la variance σ_K^2 de krigeage est égale à :

$$(VII, 20) \quad \sigma_K^2 = \sigma_E^2 - \sum_i \lambda_i N_i$$

où σ_E^2 est la variance d'extension du panneau reconnu uniquement par l'extérieur, et où N_i sont les seconds membres du système de Matheron. Or, puisque tous les sondages sont supposés éloignés, σ_E^2 se réduit à la variance du panneau et est directement accessible sur les abaques (IV, 9) (rectangle) (IV, 26) (triangle). La variance du panneau vaut C fois le complément à un de la valeur lue sur l'abaque. La figure (IV - 26) ne convient que pour les petites mailles. On a vu en ce qui concernait les grandes mailles que la surface de la figure était l'élément prédominant. On remplacera dans ce cas le grand triangle par un rectangle de même surface et de même module d'anisotropie $\frac{\ell}{L}$.

Les N_i , dans le cadre des hypothèses adoptées, sont eux aussi très simples et égaux à la covariance du sondage i avec le panneau P . On limitera le calcul des variances de krigeage aux panneaux carrés de côté b ou rectangles isocèles. Dans ces conditions,

$$N_i = C \left[1 - H \left(\frac{b}{2a}, \frac{b}{2a} \right) \right] \quad \text{pour le sondage central} \\ \text{(panneau carré ou triangulaire)}$$

$$N_i = C \left[1 - H \left(\frac{b}{a}, \frac{b}{a} \right) \right] \quad \text{sondages d'angles en panneau carré} \\ \text{et sommets des angles aigus du triangle}$$

(VII, 21)

$$N_i = C \left[1 - H \left(\frac{b}{a\sqrt{2}}, \frac{b}{a\sqrt{2}} \right) \right] \quad \text{panneau triangulaire} \\ \text{sommet de l'angle droit}$$

$$N_i = C \left[1 - 2 H \left(\frac{b}{a}, \frac{b}{a} \right) + H \left(\frac{b}{a\sqrt{2}}, \frac{b}{a\sqrt{2}} \right) \right] \quad \text{panneau triangulaire} \\ \text{sommet extérieur} \\ \text{panneau}$$

Les valeurs de H peuvent être déduites des abaques (IV, 9) $F(\ell, h)$ et (IV, 11) $(\sigma_{E_2}^2)$ par la relation :

$$(VII, 22) \quad H(b, b) = \frac{1}{2} \left[\sigma_{E_2}^2(2b, 2b) + F(2, 2b) \right]$$

(On n'oubliera pas que dans les abaques du chapitre IV, la portée a représente les $\frac{3}{2}a$ de la valeur adoptée ici pour le paramètre de même nom).

3. KRIGEAGE REGULIER - TROIS CAS PARTICULIERS

3.1. Etude des petits panneaux isotropes, quand l'effet de pépité $\varepsilon = 0$

Supposons que soient réalisées simultanément les trois conditions suivantes :

- il n'y a pas d'effet de pépité, $\varepsilon = 0$
- le $\gamma(h)$ est assimilable à une droite même pour la distance la plus grande mise en jeu dans le calcul (la taille des panneaux est petite vis à vis de la portée)
- le schéma est isotrope et les configurations des panneaux carrées (ou, ce qui est identique, l'anisotropie géométrique est contrebalancée par celle des panneaux, de forme adaptée). Cette condition est en pratique moins sévère que les deux autres et on pourra encore admettre des panneaux d'anisotropie de rapport égal à 0,5.

Si ces trois conditions sont respectées, on peut utiliser des formules asymptotiques, dues à G. MATHERON (traité de géostatistique, tome 2) et A. CARLIER (contribution à l'estimation des gisements d'uranium) que nous reproduisons.

La configuration adoptée par ces auteurs n'est pas la même que la nôtre et possède deux auréoles, comme l'indique la figure (VII - 8 bis).

De plus, ε étant nul, on néglige le poids des sondages extérieurs, approximation qui sera d'autant plus justifiée que les auréoles seront plus complètes.

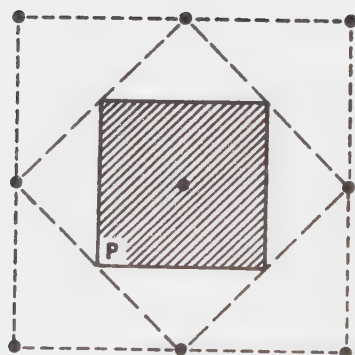


Figure **XII-8 bis**

sondage central A, teneur u
 première auréole B, teneur moyenne v
 deuxième auréole C, teneur moyenne w

Si u est la teneur du sondage central de la figure (VII - 8 bis), v celle de la première auréole et w celle de la seconde, on écrit l'estimateur du panneau sous la forme :

$$z^* = (1 - \lambda - \mu) u + \lambda v + \mu w$$

$$z'^* = \lambda' v + (1 - \lambda') w$$

selon que le sondage central est présent ou absent, pour la même configuration des autres sondages. σ_K^2 et $\sigma_{K'}^2$ sont les variances de kirgeage correspondantes.

Nous donnons immédiatement les tableaux de valeurs de λ et μ , sans un exemple numérique qui serait encore plus simple que celui du cas général.

NOTA : On remarquera que ni la taille du panneau, ni la pente du variogramme n'interviennent dans l'expression des poids λ et μ des sondages, ce qui transforme les abaques en des tableaux beaucoup plus simples et encore plus faciles à manier.

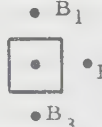
Tableau VII-9

Formules asymptotiques des petites mailles

Configuration	λ	μ	$\frac{\pi}{C} \frac{a}{b} \sigma_K^2$	λ'	$\frac{\pi}{C} \frac{a}{b} \sigma_{K'}^2$
1 	0	0	0,758		
2 	0,424	0	0,312	1	1,140
3 	0	0,311	0,418	0	2,096
4 	0,407	0,017	0,311	1,014	1,139
5 	0,168	0	0,581	1	4,932
6 	0	0,123	0,624	0	7,459

Configuration	λ	μ	$\frac{\pi}{C} \frac{a}{b} \sigma_K^2$	λ'	$\frac{\pi}{C} \frac{a}{b} \sigma_{K'}^2$
7 	0,117	0,057	0,572	0,701	4,370
8 	0,159	0,111	0,468	0,590	2,570
9 	0,260	0	0,484	1	2,710
10 	0,276	- 0,015	0,484	1,084	2,691
11 	0,246	0,108	0,380	0,701	1,652
12 	0,336	0	0,404	1	1,790
13 	0	0,191	0,550	0	4,317

Configuration	λ	μ	$\frac{\pi}{C} \frac{a}{b} \sigma_K^2$	λ'	$\frac{\pi}{C} \frac{a}{b} \sigma_{K'}^2$
14 	0,282	0,068	0,387	0,825	1,672
15 	0	0,246	0,488	0	3,056
16 	0,254	0,103	0,378	0,737	1,612
17 	0,410	0,017	0,310	0,986	1,139
18 	0,204	0,144	0,386	0,593	1,513
19 	0,152	0,175	0,406	0,472	1,890
20 	0,073	0,133	0,536	0,414	3,852

Configuration	λ	μ	$\frac{\pi}{C} \frac{a}{b} \sigma_K^2$	λ'	$\frac{\pi}{C} \frac{a}{b} \sigma_{K'}$
21 	$\lambda_1 + \lambda_2 = 0,286$ $\lambda_2 = 0,084$	0	0,367	0,771	1,492
22 	0,304	0,092	0,337	0,778	1,318
23 	0,324	0,053	0,359	0,865	1,413

Viennent en plus trois configurations centrées, λ est le coefficient de la moyenne des quatre sondages d'angle

Configuration	$\frac{\pi}{C} \frac{a}{b} \sigma_K^2$	
24 	1	0,335
25 	0,326	0,210
26 	1,02	0,148

3.2. Cas particulier unidimensionnel

Reprenons les configurations du cas général. A la limite, lorsque l'anisotropie est poussée à l'extrême, le panneau est remplacé par un segment de droite, d'échantillon central de teneur x et d'échantillons extrêmes de teneurs y_1 et y_2 . Le reste du gisement a lui pour teneur z .

Dans ce cas particulier, les équations du krigeage se résolvent facilement, encore que les solutions ne présente guère d'élégance. Nous donnons donc maintenant ces résultats formels, plus précis que les abaques, en fixant tout de même quelques valeurs numériques, définies pour h , longueur du segment, égalant 0,7 a mais qu'on pourra utiliser de h variant de 0,5 a jusqu'à a.

$$t = \lambda x + \mu y_1 + (1 - \lambda - \mu) z$$

avec

$$\lambda = \frac{1 - \frac{h}{4} (1 + \epsilon) - 1 - \frac{h}{2}}{(1 + \epsilon)^2 - 1 - \frac{h}{2}}$$

$$\mu = \frac{1 - \frac{h}{2} (1 + \epsilon) - 1 - \frac{h}{2} - 1 - \frac{h}{4}}{(1 + \epsilon)^2 - 1 - \frac{h}{2}}$$

(VII.16)

Application numérique

$$h = 0,7 \text{ a}$$

pour	$\epsilon = 0$	$\lambda = 0,703$	$\mu = 0,189$
pour	$\epsilon = 0,15$	$\lambda = 0,589$	$\mu = 0,230$
pour	$\epsilon = 0,30$	$\lambda = 0,517$	$\mu = 0,240$



le sondage central est absent. On forme l'estimateur

$$t = \mu \frac{y_1 + y_2}{2} + (1 - \mu) z$$

$$\mu = \frac{N_y}{R_y} = \frac{1 - \frac{h}{2}}{1 + \frac{1}{2} (\epsilon - h)}$$

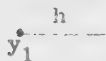
(VII.17)

Application numérique

$h = 0,7 \text{ a}$

pour	$\epsilon = 0$	$\mu = 1$	(résultat vrai quel que soit h)
pour	$\epsilon = 0,15$	$\mu = 0,896$	
pour	$\epsilon = 0,30$	$\mu = 0,812$	

4.



Le sondage central et un des périphériques sont absents. On forme l'estimateur

$$t = \mu y_1 + (1 - \mu)z$$

avec

$$\mu = \frac{1 - \frac{h}{2}}{1 + \epsilon}$$

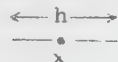
(VII.18)

Application numérique

$h = 0,7$

pour	$\epsilon = 0$	$\mu = 0,65$
pour	$\epsilon = 0,15$	$\mu = 0,56$
pour	$\epsilon = 0,30$	$\mu = 0,50$

5.



Seul le sondage central est présent. On forme l'estimateur :

$$t = \lambda x + (1 - \lambda) z$$

avec

$$\lambda = \frac{1 - \frac{h}{4}}{1 + \epsilon}$$

(VII.19)

Application numérique

pour	$\epsilon = 0$	$\lambda = 0,830$
pour	$\epsilon = 0,15$	$\lambda = 0,722$
pour	$\epsilon = 0,30$	$\lambda = 0,638$

3.3. Le krigeage élémentaire

Le but du krigeage élémentaire est de kriger des configurations assez compliquées, comme l'avance d'un front de défilage.

Pour y parvenir, on découpe en tous petits éléments le grand panneau rectangulaire classique du krigeage régulier. Cette méthode rajoute évidemment beaucoup de paramètres. Pour ne pas aboutir à un atlas d'abaques fastidieux, on a donc été obligé de faire des approximations par ailleurs. Elles limitent la validité du krigeage élémentaire aux deux conditions suivantes :

1°) la configuration du groupe des sondages (et non plus du panneau) est un carré, ou au plus un rectangle de rapport d'anisotropie 0,5

2°) l'effet de pépité ϵ est inférieur à 0,30. S'il est plus petit que 0,10, le côté du carré de la figure des sondages doit être compris entre 0 et la portée a . Si ϵ est compris entre 0,10 et 0,30, le carré de la figure des sondages doit être compris entre 0,20 a et 0,80 a .

Nous incluons dans le texte, avant les abaques, un exercice d'utilisation. L'expression et le mode de calcul de la variance de krigeage qu'on y trouvera sont les mêmes que pour tous les problèmes de krigeage élémentaire.

Exercice-type F

Exemple d'utilisation du krigeage élémentaire

Cet exercice est lui aussi une application des abaques de krigeage, mais dans un cas un peu différent, car il faut superposer le plan minier à plusieurs abaques.

Nous profitons de ce qu'il y a déjà en un exercice assez proche de celui-ci, pour analyser ce dernier d'un peu plus près et voir en particulier comment varient les paramètres en fonction de l'effet de pépité.

Soit donc à kriger le petit panneau P. Nous avons choisi pour P un panneau en forme d'escalier -représentant par exemple la production mensuelle d'une portion d'un front de dépilage - constitué de 6 carrés élémentaires, de 20 m de côté, numérotés de 1 à 6 (cf. figure VII - 72 A).

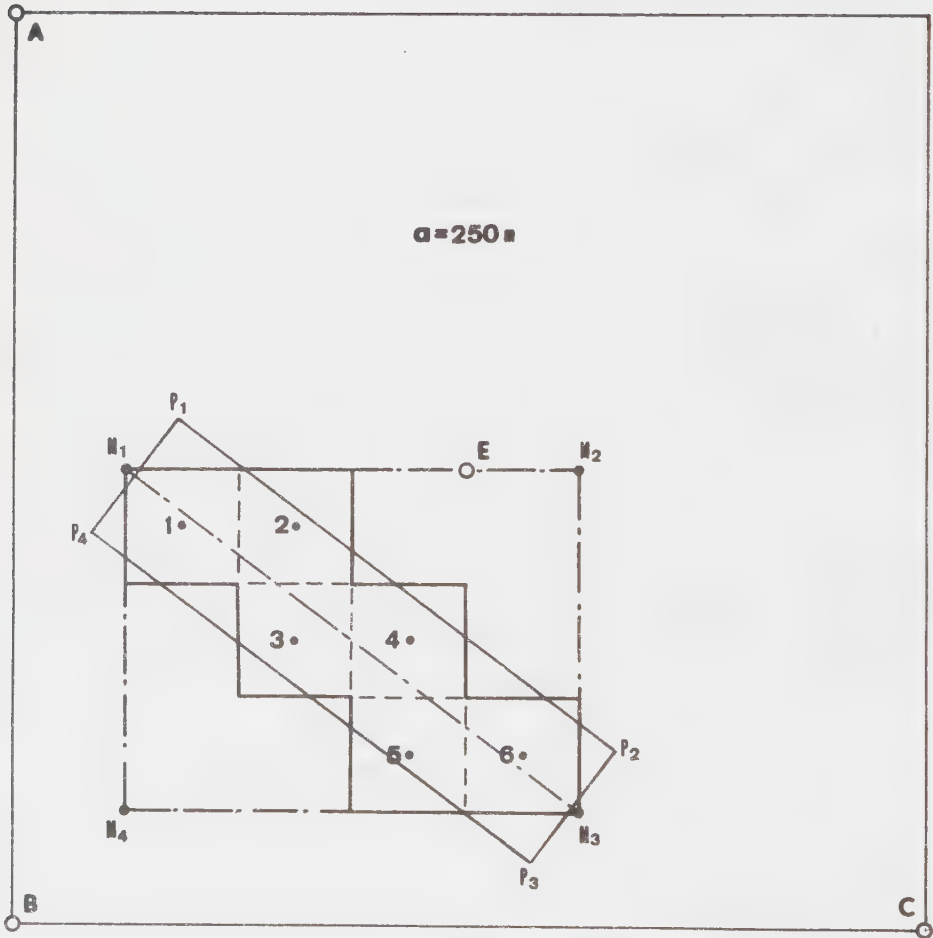
Les sondages les plus proches sont disposés au centre E et à trois sommets A, B et C d'un carré de côté $b = 160$ m.

La régionalisation est isotrope de portée $a = 250$ mètres. Le rapport $\frac{b}{a}$ n'est donc pas très différent de 0,5, nous sommes donc dans les conditions d'utilisation des abaques du krigeage élémentaire.

Par contre, ne fixons pas pour l'instant de valeur à $\mathcal{E}$.

Fig. 72 - A

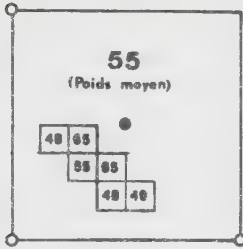
$b=160\text{ m}$



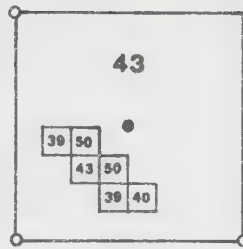
Echelle 1/1000

Fig. 72-B

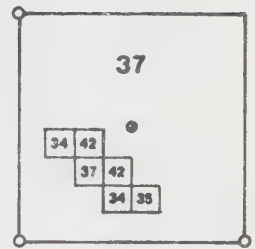
$\epsilon = 0$



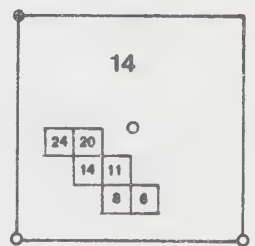
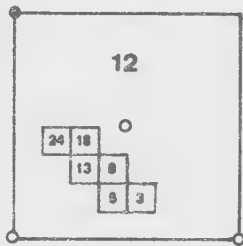
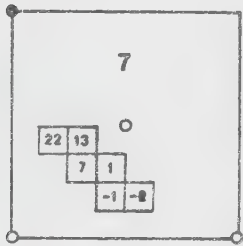
$\epsilon = 0,15$



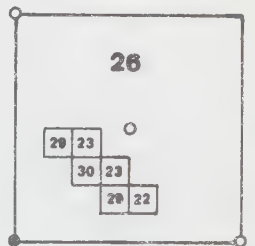
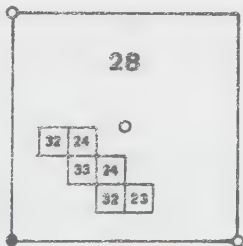
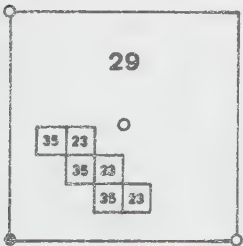
$\epsilon = 0,30$



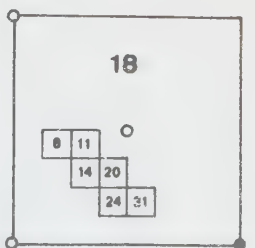
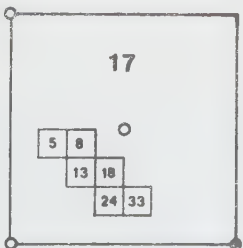
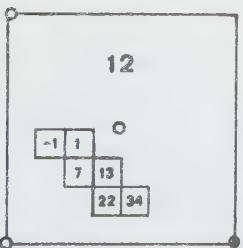
E



A



B



C

Dessignons sur un calque le plan minier de la figure 72 A, légèrement stylisé par rapport à la réalité, et superposons le aux abaques 63, 64 et 65 pour connaître respectivement les poids de A, B et E. Le résultat de cette superposition est indiqué sur la figure 72 B. Il suffit ensuite de prendre à chaque fois la moyenne des six valeurs lues.

Reste le point C. Pour connaître son poids, il suffit de retourner le plan minier et de le présenter à l'envers. C occupe alors l'ancienne position de A et on peut se référer encore à l'abaque 63 (ancien abaque de A) et lire les valeurs inscrites dans le panneau P tel qu'il nous apparait après son retournement.

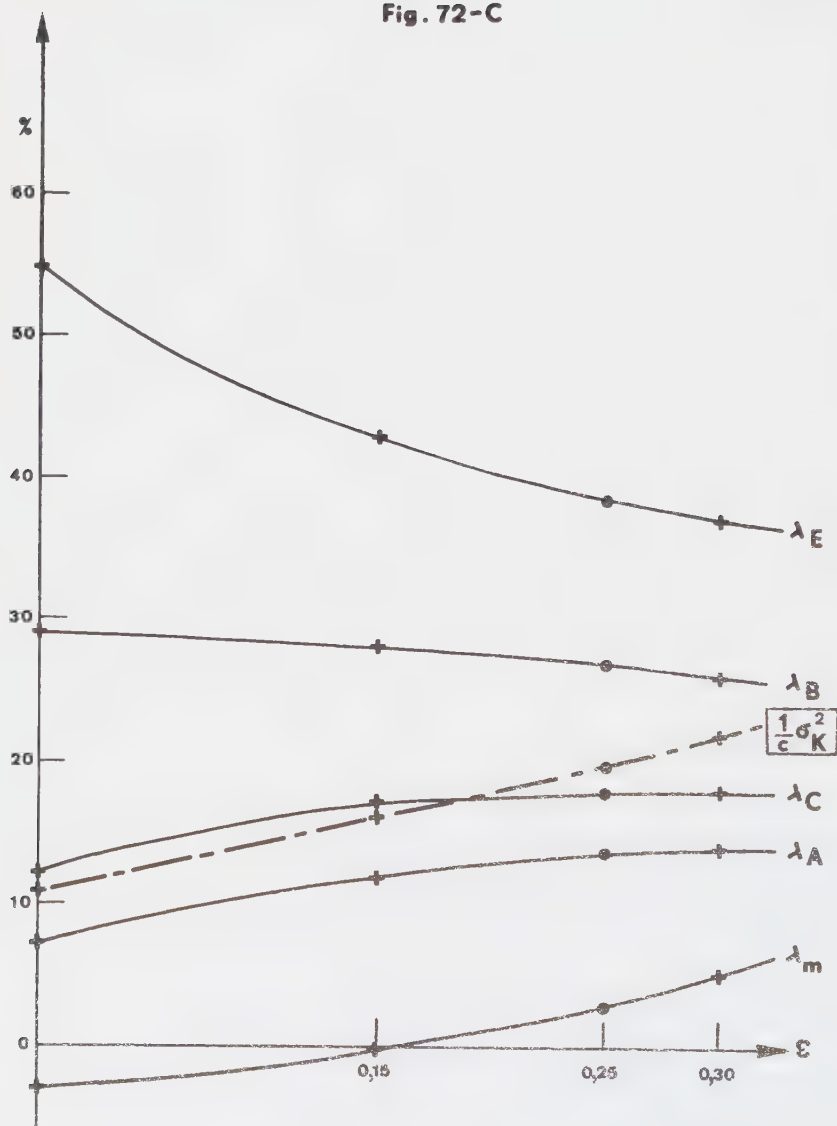
Soient λ_E , λ_A , λ_B , et λ_C les poids à accorder respectivement aux sondages E, A, B et C ; λ_m le poids à accorder à la moyenne indifférenciée des N sondages. Les opérations ont été reproduites en détail sur la figure (VII - 72 B) ; il vient en définitive :

	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 0,15$	$\epsilon = 0,30$	
λ_E	55	43	37	%
λ_A	7	12	14	%
λ_B	29	28	26	%
λ_C	12	17	18	%
$1 - \lambda_m$	103	100	95	%
λ_m	- 3	0	5	%

Ces résultats nous permettent de déterminer les poids à accorder aux sondages pour n'importe quel coefficient d'effet de pépité ϵ , compris entre 0 et 0,30, par interpolation ou même graphiquement (cf. figure VII - 72 C). Par exemple, supposons que $\epsilon = 0,25$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \lambda_E &= 38 \% \\
 \lambda_A &= 14 \% \\
 \lambda_B &= 27 \% \\
 \lambda_C &= 18 \% \\
 \lambda_m &= 3 \%
 \end{aligned}$$

Fig. 72-C



Calcul de la variance de krigeage

Pour calculer la variance de krigeage, il faut remplacer le panneau P par un rectangle de même taille qui le recouvre au mieux. C'est le rectangle $P_1 P_2 P_3 P_4$ de la figure (VII - 72 A), qu'on a délimité par approximation. Ces deux côtés h' et ℓ' valent :

$$h' = 0,10 a$$

et

$$\ell' = 0,39 a$$

Il nous faut de plus mesurer les distances moyennes des sondages A, B, C, E au panneau P. On a pris la valeur moyenne des distances des sondages aux 6 points 1, 2, 3, 4, 5, 6, ce qui est amplement suffisant et qui donne :

$$d_A = 0,50 a$$

$$d_C = 0,50 a$$

$$d_B = 0,32 a$$

$$d_E = 0,17 a$$

La variance de krigeage a pour expression :

$$\frac{1}{C} \cdot \sigma_K^2 = \frac{1}{a} (\lambda_A d_A + \lambda_B d_B + \lambda_C d_C + \lambda_E d_E) + \lambda_{\text{ext.}} - F \left(\frac{h'}{a}, \frac{\ell'}{a} \right)$$

En effet, les termes N_i de la formule générale (VII, 6), donnant la variance de krigeage, sont proportionnels aux distances moyennes $d_A \dots d_E$, vu la linéarité du $\gamma(h)$.

La fonction $F\left(\frac{h'}{a}, \frac{e'}{a}\right)$, variance d'un point dans un rectangle, est tabulée au chapitre IV (fig. 9), elle vaut 0,86 pour nos valeurs numériques d'où

$$\sigma_K^2 = 0,19 \text{ C}$$

Prenons par exemple $C = 4 \text{ points}^2$, ce qui correspond à une bonne valeur moyenne pour la couche grise, on a alors :

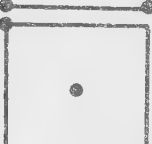
$$\sigma_K^2 = 0,78 \text{ points}^2$$

et la fourchette d'erreur est :

$$\pm 2 \sigma_K = \pm 1,8 \text{ point}$$

Remarque : On a porté graphiquement tous ces résultats en fonction d'un effet de pépite variable (figure 72 C). Comme on pouvait s'y attendre, dès que ϵ prend un peu d'importance, l'influence du sondage E , qui est le mieux situé par rapport au panneau, décroît très vite.

**Fig.59-Liste des abaques de krigeage élémentaire
à configuration carrée.**

cas 1		2 abaques (fig.60 et 61)
cas 2		1 " " 62
cas 3		3 " " 63 à 65
cas 4		2 " " 66 et 67
cas 5		2 " " 68 et 69
cas 6		1 " " 70
cas 7		1 " " 71

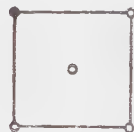
86	71	56	43	31	20	11	3
71	60	47	34	23	14	7	1
56	47	35	23	14	8	3	-1
43	34	23	11	4	2	0	-3
31	23	14	4	-1	-2	-2	-3
20	14	8	2	-2	-3	-3	-3
11	7	3	0	-2	-3	-3	-2
3	1	-1	-3	-3	-3	-2	-1

$\epsilon = 0$

Fig.60

Krigeage élémentaire

Configuration carrée n° 1



69	59	48	38	29	21	14	7
59	51	41	32	24	17	11	5
48	41	33	25	18	12	8	4
38	32	25	16	11	8	5	2
29	24	18	11	6	4	2	0
21	17	12	8	4	2	0	-1
14	11	8	5	2	0	-1	-2
7	5	4	2	0	-1	-2	-3

$\epsilon = 0,15$

59	51	42	34	27	21	14	9
51	45	37	30	23	17	12	7
42	37	31	24	18	14	9	6
34	30	24	18	13	10	7	4
27	23	18	13	9	7	4	2
21	17	14	10	7	4	2	1
14	12	9	7	4	2	1	-1
9	7	6	4	2	1	-1	-2

$\epsilon = 0,30$

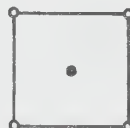
10	21	29	34	34	29	21	10
21	32	42	49	49	42	32	21
29	42	56	66	66	56	42	29
34	49	66	84	84	66	49	34
34	49	66	84	84	66	49	34
29	42	56	66	66	56	42	29
21	32	42	49	49	42	32	21
10	21	29	34	34	29	21	10

$\xi=0$

Fig. 61

Krigeage élémentaire

Configuration carrée n°1



15	21	26	29	29	26	21	15
21	28	34	38	38	34	28	21
26	34	42	48	48	42	34	26
29	38	48	59	59	48	38	29
29	38	48	59	59	48	38	29
26	34	42	48	48	42	34	26
21	28	34	38	38	34	28	21
15	21	26	29	29	26	21	15

$\xi=0,15$

16	20	24	26	26	24	20	16
20	25	30	33	33	30	25	20
24	30	36	40	40	36	30	24
26	33	40	48	48	40	33	26
26	33	40	48	48	40	33	26
24	30	36	40	40	36	30	24
20	25	30	33	33	30	25	20
16	20	24	26	26	24	20	16

$\xi=0,30$

89	77	65	52	40	28	17	6
77	69	59	48	37	26	16	7
65	59	51	42	33	24	15	7
52	48	42	35	28	20	14	7
40	37	33	28	22	17	11	6
28	26	24	20	17	13	9	5
17	16	15	14	11	9	6	3
6	7	7	7	6	5	3	2

$\epsilon=0$

73	64	55	46	37	28	19	11
64	58	50	42	34	26	18	11
55	50	44	37	30	23	17	11
46	42	37	32	26	20	15	9
37	34	30	26	22	17	12	8
28	26	23	20	17	13	9	6
19	18	17	15	12	9	7	3
11	11	11	9	8	6	3	1

$\epsilon=0,15$

63	56	48	41	34	27	20	13
56	51	45	38	31	25	18	13
48	45	40	34	28	22	17	12
41	38	34	29	25	20	15	10
34	31	28	25	21	17	13	9
27	25	22	20	17	13	10	7
20	18	17	15	13	10	7	4
13	13	12	10	9	7	4	2

$\epsilon=0,30$

Fig.62

Krigeage élémentaire

Configuration carrée n°2



87	74	61	50	40	33	28	23
72	62	50	39	31	25	21	18
56	47	36	26	19	16	14	12
42	34	23	12	6	7	7	7
30	22	13	4	-1	1	3	4
19	14	7	1	-1	-1	0	1
11	6	2	-1	-2	-2	-1	0
3	1	-2	-3	-4	-4	-2	0

$\xi=0$

71	62	53	44	37	32	27	23
60	53	45	37	31	26	22	19
49	43	36	28	23	19	17	14
38	33	26	19	14	13	12	10
29	24	18	12	8	8	7	6
21	17	13	8	6	5	4	3
13	11	8	5	3	2	2	1
6	5	3	2	0	0	-1	-1

$\xi=0,15$

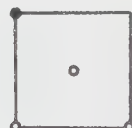
61	54	47	40	34	29	25	21
52	47	41	35	29	25	21	18
44	39	34	28	23	20	17	15
35	31	26	20	16	15	13	11
28	24	20	15	11	10	9	8
21	18	14	11	9	7	6	5
14	12	10	8	6	4	3	2
8	7	6	4	3	2	1	0

$\xi=0,30$

Fig.63

Krigeage élémentaire

Configuration carrée $n^2=3$



2	-2	-7	-11	-15	-19	-22	-25
11	5	-1	-7	-12	-16	-19	-22
20	13	6	-2	-8	-12	-16	-19
31	23	13	3	-5	-8	-12	-15
44	35	23	11	3	-2	-7	-11
57	47	35	23	13	6	-1	-7
72	61	47	35	23	13	5	-2
87	72	57	44	31	20	11	2

$\epsilon=0$

6	3	0	-3	-6	-9	-12	-14
13	9	5	1	-3	-6	-9	-11
20	16	10	5	0	-3	-6	-9
29	23	16	9	3	0	-3	-6
38	32	24	15	9	5	1	-3
48	41	33	24	16	10	5	0
59	51	41	32	23	16	9	3
70	59	48	38	29	20	13	6

$\epsilon=0,15$

8	6	4	1	-2	-4	-6	-8
14	11	8	4	1	-1	-4	-6
20	16	12	8	4	1	-1	-4
27	22	17	11	7	4	1	-2
34	29	23	17	11	8	4	1
42	37	30	23	17	12	8	4
51	45	37	29	22	16	11	6
59	51	41	34	27	20	14	8

$\epsilon=0,30$

Fig.64

Krigeage élémentaire

Configuration carrée n°3



12	26	40	51	57	59	58	56
21	35	50	61	67	67	63	58
29	44	60	74	79	74	67	59
33	49	67	86	90	79	67	57
33	48	65	84	86	74	61	51
28	41	55	65	67	60	50	40
19	30	41	48	49	44	35	26
9	19	28	33	33	29	21	12

$\xi=0$

17	26	35	41	45	46	45	43
23	32	41	48	51	51	48	45
28	37	47	55	58	55	51	46
30	40	51	63	65	58	51	43
29	39	50	61	63	55	48	41
26	34	43	50	51	47	41	35
20	27	34	39	40	37	32	26
13	20	26	29	30	28	23	17

$\xi=0,15$

19	25	31	36	38	39	38	36
23	29	36	41	43	43	41	38
26	33	40	46	48	46	43	39
28	35	44	52	54	48	43	38
27	34	42	51	52	46	41	36
24	31	37	42	44	40	36	31
20	26	31	34	35	33	29	25
15	20	24	27	28	26	23	19

$\xi=0,30$

Fig. 65

Krigeage élémentaire

Configuration carrée n°3



92	85	77	70	64	57	51	46
80	76	70	64	58	52	47	41
68	65	61	56	51	46	41	36
56	54	51	47	43	39	35	31
43	42	40	38	35	31	28	24
31	30	29	28	26	24	21	18
18	19	19	19	17	16	14	11
7	8	10	10	9	8	7	4

$\xi=0$

Fig. 66

Krigeage élémentaire

Configuration carrée n° 4



77	71	65	59	54	48	43	38
68	65	60	55	49	44	39	35
59	56	53	49	44	40	35	31
49	47	45	42	38	34	30	26
40	38	36	34	31	28	25	21
30	29	28	26	24	22	19	16
21	20	20	19	18	16	13	11
11	12	13	12	11	10	8	5

$\xi=0,15$

67	62	57	52	47	42	38	33
60	57	53	48	43	39	35	31
52	50	47	43	39	35	31	27
44	43	40	37	34	31	27	24
35	35	34	31	29	26	23	19
29	28	27	25	23	21	18	15
21	21	20	19	17	15	13	10
13	14	14	13	12	10	8	6

$\xi=0,30$

5	4	3	1	-2	-5	-8	-12
16	14	11	8	4	0	-4	-8
27	24	20	15	11	5	0	-5
39	35	29	23	17	11	4	-2
51	46	39	31	23	15	8	1
64	57	49	39	29	20	11	3
77	68	57	46	35	24	14	4
89	77	64	51	39	27	16	5

$\epsilon=0$

10	10	9	7	5	2	-1	-4
19	17	15	12	9	6	3	-1
27	25	22	18	14	10	6	2
36	33	29	24	19	14	9	5
45	41	36	30	24	18	12	7
55	50	43	36	29	22	15	9
64	58	50	41	33	25	17	10
73	64	55	45	36	27	19	10

$\epsilon=0,15$

13	12	11	10	8	6	3	0
19	18	16	14	12	9	6	3
26	24	22	19	16	12	9	6
33	31	28	24	20	16	12	8
41	38	34	29	24	19	14	10
48	44	39	34	28	22	16	11
56	51	44	38	31	24	18	12
63	56	48	41	33	26	19	13

$\epsilon=0,30$

Fig.67

Krigeage élémentaire
Configuration carrée n°4



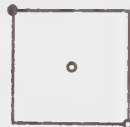
88	74	60	48	38	30	24	18
74	63	50	38	29	22	17	14
60	50	38	26	18	13	11	9
48	38	26	13	6	5	5	4
38	29	18	6	0	1	2	2
30	22	13	5	1	0	0	0
24	17	11	5	2	0	0	0
18	14	9	4	2	0	0	0

$\epsilon=0$

Fig.68

Krigeage élémentaire

Configuration carrée n°5



72	62	53	44	36	30	25	20
62	55	46	37	30	25	20	16
53	46	38	29	23	19	16	13
44	37	29	20	15	13	11	9
36	30	23	15	10	9	8	6
30	25	19	13	9	7	5	3
25	20	16	11	8	5	3	2
20	16	13	9	6	3	2	0

$\epsilon=0,15$

63	55	47	40	34	29	24	20
55	49	42	35	30	25	21	17
47	42	36	29	24	20	17	14
40	35	29	22	18	15	13	11
34	30	24	18	14	12	10	8
29	25	20	15	12	9	7	5
24	21	17	13	10	7	4	2
20	17	14	11	8	5	2	0

$\epsilon=0,30$

13	26	37	46	51	51	49	45
26	38	49	58	62	60	53	49
37	49	63	73	75	69	60	51
46	58	73	88	88	75	62	51
51	62	75	88	88	73	58	46
51	60	69	73	73	63	49	37
49	55	60	62	58	49	38	26
45	49	51	51	46	37	26	13

$\xi=0$

20	28	35	40	42	42	41	38
28	35	42	48	50	48	45	41
35	42	50	57	58	54	48	42
40	48	57	66	66	58	50	42
42	50	58	66	66	57	48	40
42	48	54	58	57	50	42	35
41	45	48	50	48	42	35	28
38	41	42	42	40	35	28	20

$\xi=0,15$

21	27	32	36	38	38	36	34
27	33	38	42	43	42	39	36
32	38	44	49	50	47	42	38
36	42	49	56	56	50	43	38
38	43	50	56	56	49	42	36
38	42	47	50	49	44	38	32
36	39	42	43	42	38	33	27
34	36	38	38	36	32	27	21

$\xi=0,30$

Fig.69

Krigeage élémentaire

Configuration carrée n=5



92	85	78	72	65	59	54	48
81	77	71	66	60	55	49	44
68	66	62	58	53	49	44	40
56	55	52	49	46	42	38	34
44	43	42	40	37	35	32	28
31	31	31	30	29	27	25	22
19	20	21	21	21	19	18	16
7	10	11	12	13	12	11	10

$\xi=0$

78	72	67	61	56	51	46	41
69	66	61	57	52	47	43	38
60	58	54	51	47	43	39	35
50	49	47	44	41	38	34	31
41	40	39	37	35	32	29	26
31	31	30	29	28	26	24	21
22	22	22	22	21	20	18	16
12	14	15	15	15	14	13	11

$\xi=0,15$

68	63	58	54	49	45	40	36
61	58	54	50	46	42	38	34
53	51	49	45	42	38	35	31
45	44	42	40	37	34	31	28
38	37	36	34	32	30	27	24
30	30	29	28	27	25	23	20
22	23	23	22	21	20	18	16
15	16	16	17	16	15	14	12

$\xi=0,30$

Fig.70

Krigeage élémentaire

Configuration carrée n°6



94	86	79	71	63	55	48	41
86	81	74	67	60	52	45	38
79	74	69	62	55	48	41	34
71	67	62	56	50	43	36	30
63	60	55	50	44	37	31	25
55	52	48	43	37	31	25	19
48	45	41	36	31	25	19	13
41	38	34	30	25	19	13	6

$\xi=0$

81	75	68	62	55	49	43	37
75	71	65	59	53	46	40	34
68	65	60	55	49	43	37	32
62	59	55	50	45	39	33	28
55	51	49	45	40	34	29	24
49	46	43	39	34	29	24	19
43	40	37	33	29	24	19	14
37	34	32	28	24	19	14	9

$\xi=0,15$

71	66	60	55	49	44	38	33
66	63	58	53	47	42	37	31
60	58	54	49	44	39	34	29
55	53	49	45	40	36	31	26
49	47	44	40	36	32	27	23
44	42	39	36	32	27	23	19
38	37	34	31	27	23	19	14
33	31	29	26	23	19	14	10

$\xi=0,30$

Fig. 71

Krigeage élémentaire

Configuration carrée n°7



4. LE KRIGEAGE ALEATOIRE

Nous ne fournissons pas cette fois ci un exercice-type, il ressemblerait trop à celui du krigeage régulier.

Précisons, par contre, le domaine de validité. Les abaques de krigeage aléatoire s'appliquent :

- a) aux panneaux du krigeage régulier, dès que l'effet de pépité dépasse 0,30
- b) aux panneaux reconnus par maille aléatoire stratifiée.

Dans ce deuxième cas, on krige évidemment, panneau par panneau, chaque rectangle de la maille aléatoire stratifiée. Or les panneaux miniers n'ont aucune raison de coïncider avec le carroyage imposé par la reconnaissance.

Par exemple, le panneau minier est, sur la figure (VII - 74) l'ensemble $\tilde{u} = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_3 + \tilde{u}_4$. Dans ce cas, on attribuera à $\tilde{u}_1$ la teneur krigée de P_1 , à $\tilde{u}_2$ celle de P_2 , et ainsi de suite. Par reconstitution, on obtiendra donc celle de $\tilde{u}$ (moyenne pondérée par les surfaces des panneaux).

Néanmoins, si $\tilde{u}$ est grand par rapport aux panneaux P , le calcul risque d'être inutilement long. Dans ce cas, les calculs se simplifient et on aboutit à une expression de l'estimateur qui est la formule originale de Krige, dont nous allons parler maintenant.

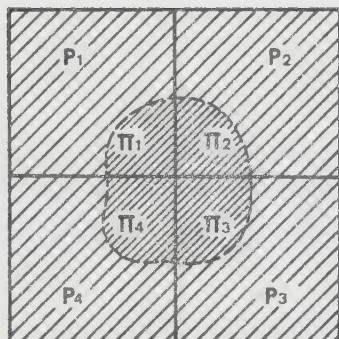


Figure VII-74

Superposition des panneaux P et Π

4.1. Formule de Krige

Le panneau $\tilde{\Pi}$ est grand par rapport à la maille aléatoire stratifiée (ou aléatoire) ; il contient n sondages de teneur moyenne y, alors que la teneur moyenne de tout le gisement est z. (Le panneau $\tilde{\Pi}$ est grand si $n > 20$).

On forme pour le panneau $\tilde{\Pi}$ l'estimateur :

$$t = \lambda y + (1 - \lambda) z$$

Il vient alors :

$$(VII, 28) \quad \lambda = \frac{\sigma_{\tilde{\Pi}}^2}{\sigma_y^2}$$

Le pondérateur est le quotient de la variance du panneau π dans le gisement, sur la variance de son échantillonnage dans le gisement.

La variance associée est :

$$\sigma_K^2 = (\sigma_y^2 - \sigma_\pi^2) \frac{C_\pi}{C_y}$$

Les deux variances qui interviennent dans ce calcul sont immédiates à calculer. On remplace π par un rectangle de même taille et même forme, le rectangle L H. Le panneau P de la maille est, lui, le rectangle ℓ , h. On a :

$$\sigma^2 = C \left[1 - F(L, H) \right]$$

$$\sigma_y^2 = \frac{C_o + C \cdot F(\ell, h)}{n}$$

$F(\ell, h)$ du schéma de Matheron est donné par l'abaque 9 du chapitre IV. (On peut prendre n'importe quel autre schéma).

4.2. Krigeage aléatoire - cas général

Quand le panneau π n'est pas grand par rapport à P, on a recours à des formules plus générales, présentées ici sous forme d'abaques.

On appellera P le panneau central,

" " P' le panneau P et les huit panneaux qui l'entourent

(attention : il ne s'agit pas de l'auréole autour de P, mais bien des 9 panneaux).

P possède n échantillons ($n = 0, 1$ ou 2) de moyenne x

P' , qui possède éventuellement des lacunes, a pour teneur moyenne y .

G, le gisement entier, a pour moyenne z .

On krige le panneau P en lui attribuant la teneur :

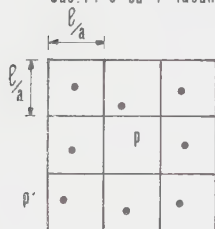
$$t = \lambda x + \mu y + (1 - \lambda - \mu) z$$

Les abaques fournissent λ et μ , dans les cas de figures indiqués sur la figure 77.

En ce qui concerne les variances de krigeage, leur formulation étant longue, on les a tabulées elles aussi. On ne s'étonnera pas qu'elles tendent vers zéro quand la taille du panneau croît indéfiniment : cela tient à nos hypothèses. On a supposé que le gisement possédait un très grand nombre de sondages, donc que sa teneur z était très bien connue. Quand P tend vers l'infini, sa teneur tend vers z , donc est de mieux en mieux connue.

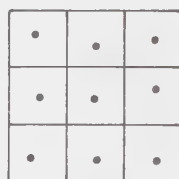
Fig.77- Plan des configurations de krigeage aléatoire

Cas.1: 0 ou 1 lacune dans la couronne p-p des 8 panneaux externes



$n=0$
 μ

Fig.78



$n=1$
 λ et μ

Fig.79



$n=2$
 λ et μ

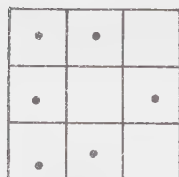
Fig.80



$n=1, n=2$
Variances

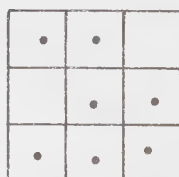
Fig.81

Cas.2: 2 ou 3 lacunes dans la couronne des 8 panneaux externes



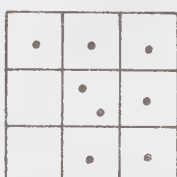
$n=0$
 μ

Fig.82



$n=1$
 λ et μ

Fig.83



$n=2$
 λ et μ

Fig.84



$n=1, n=2$
Variances

Fig.85

p' : Ensemble des 9 panneaux

p : Panneau central

λ : Pondérateur de p

μ : » p'

n : Nombre de reconnaissances de p

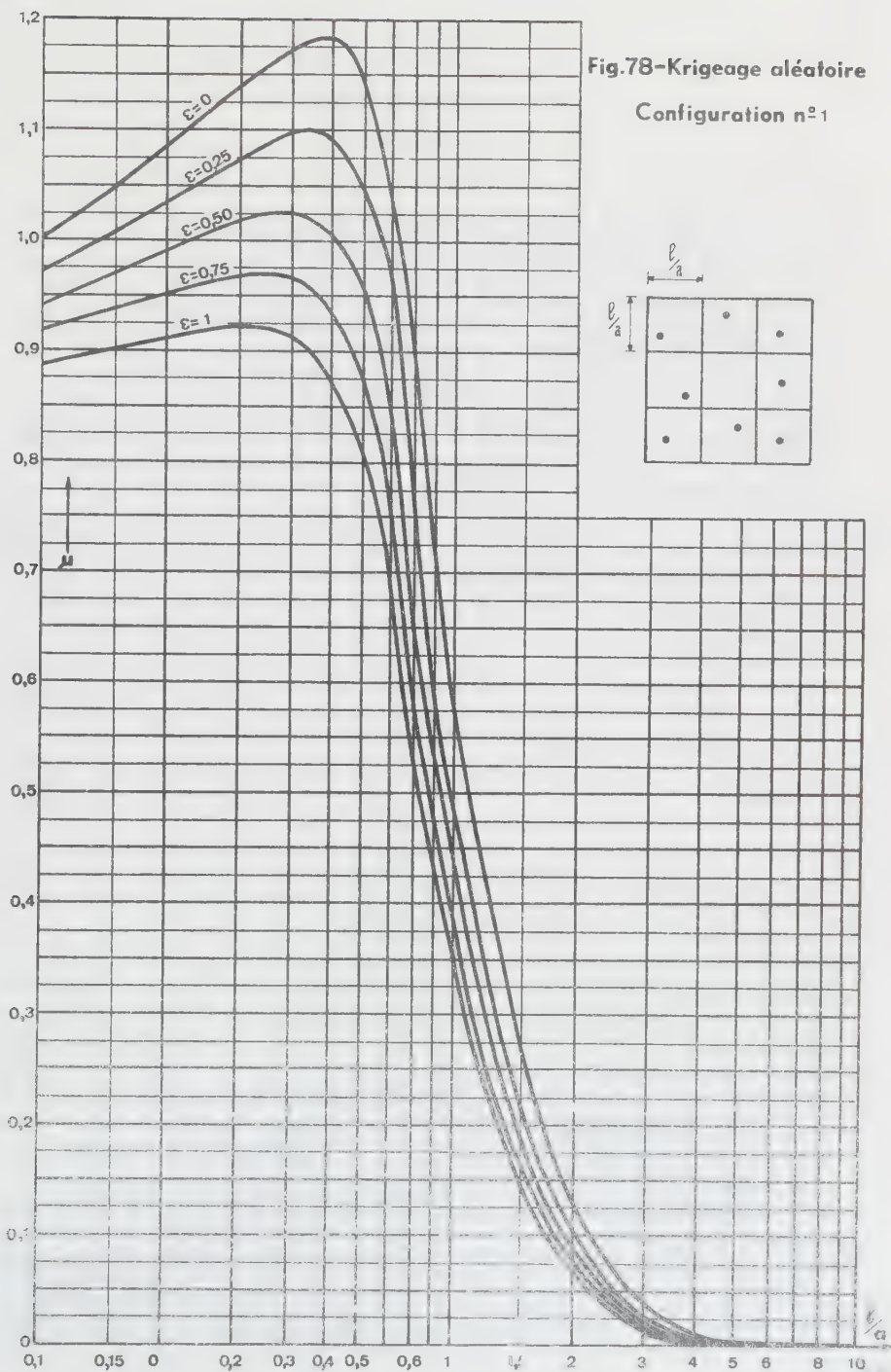


Fig.79-Krigeage aléatoire.

Configuration n°1

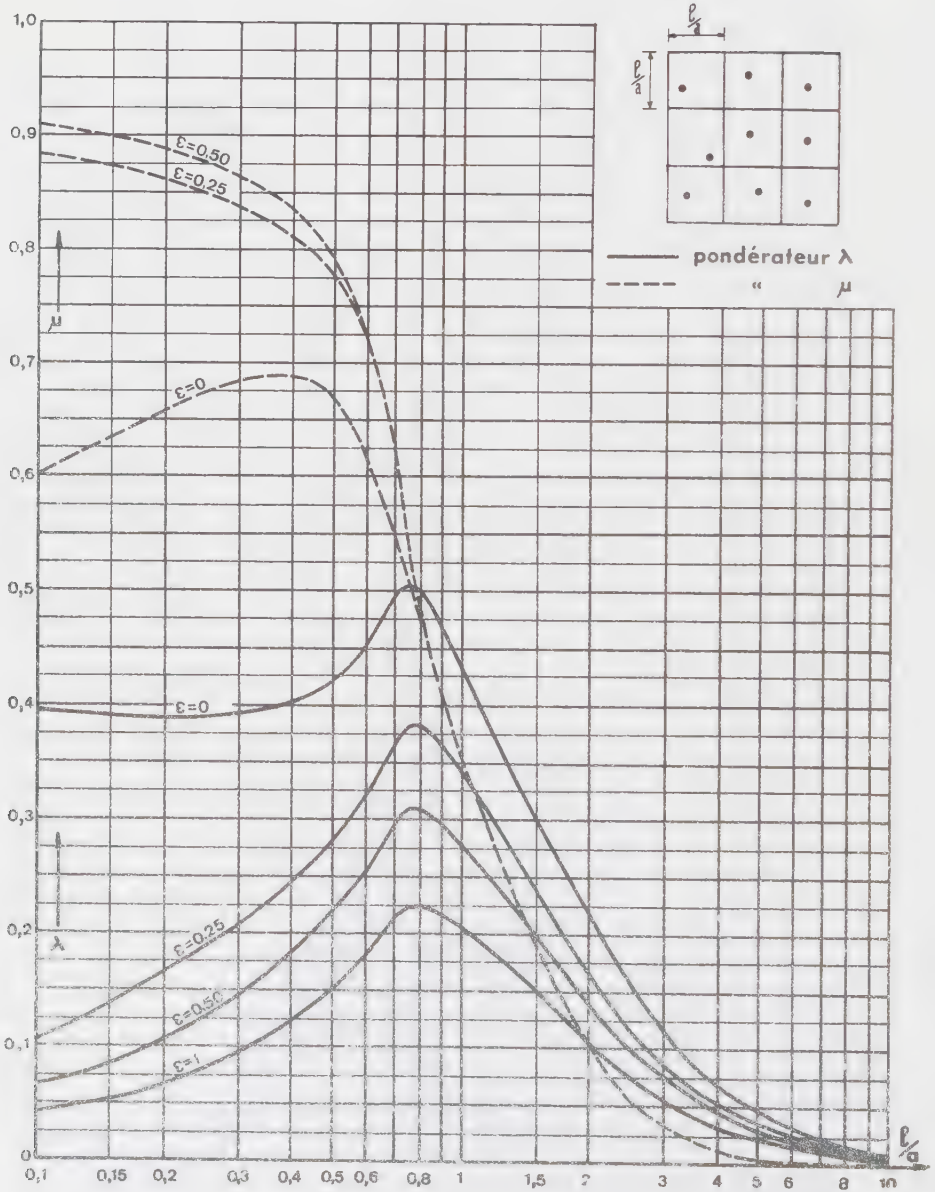


Fig.80-Krigeage aléatoire.

Configuration n°1

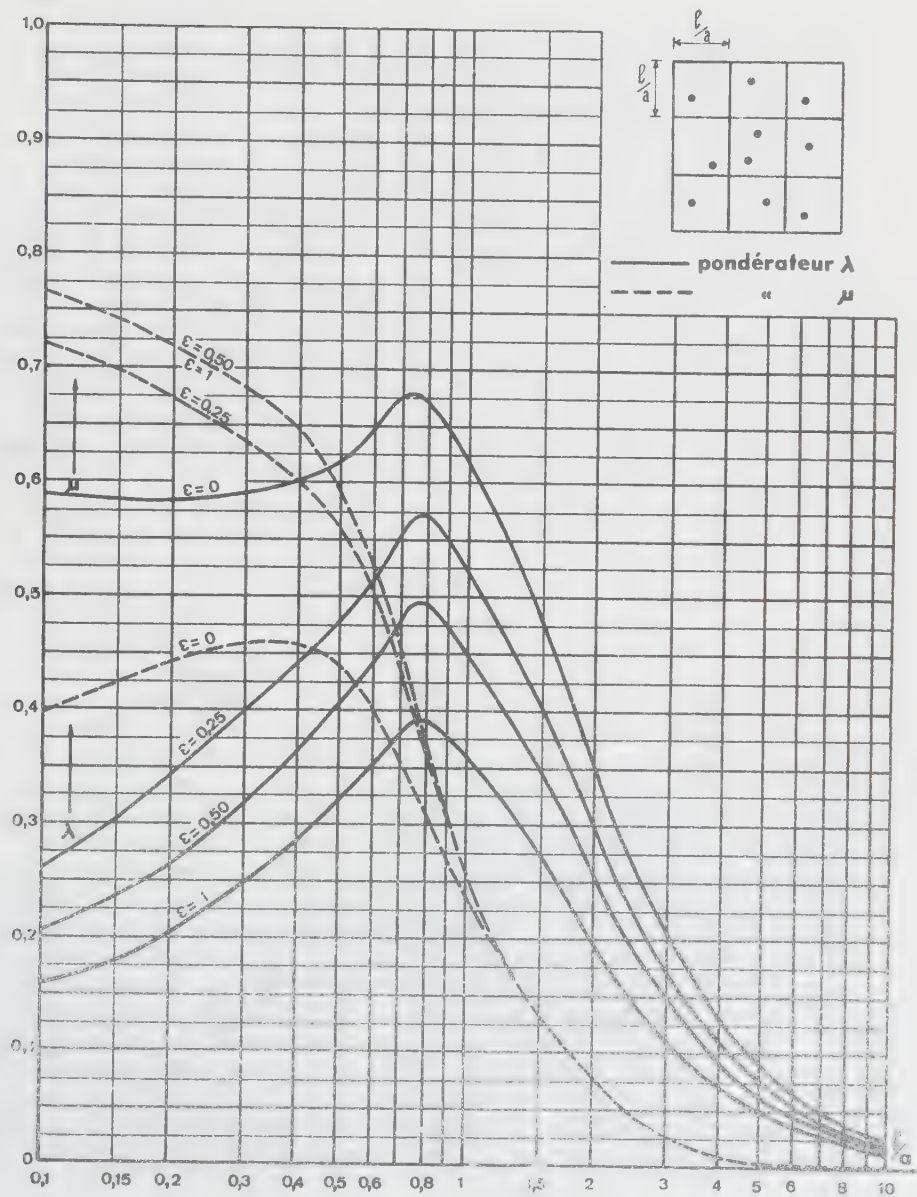


Fig.81-Krigeage aléatoire

Configuration n°1

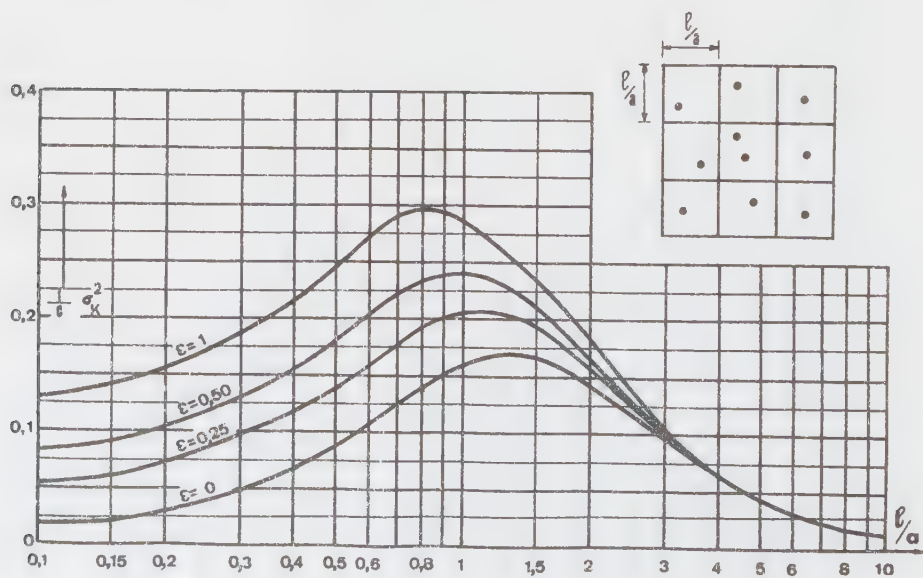
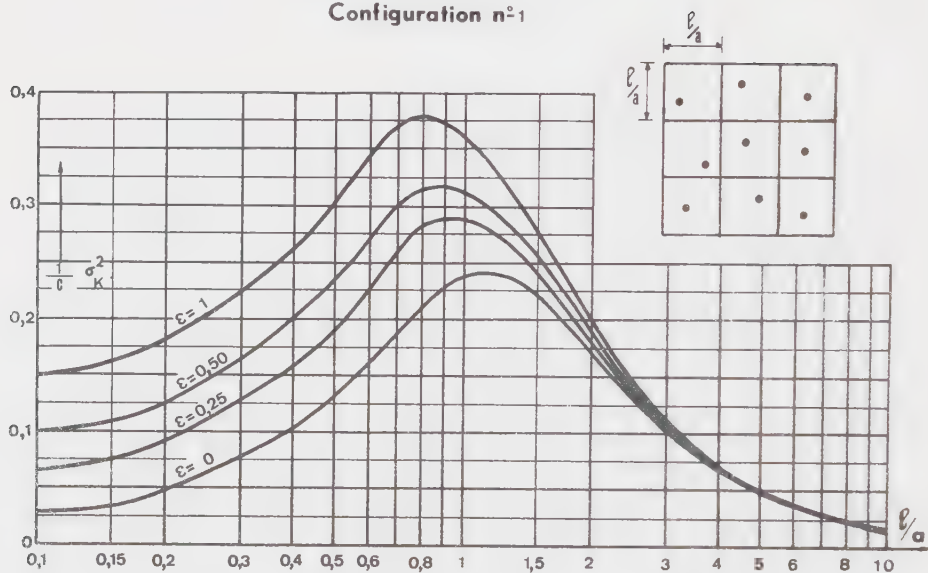


Fig.82-Krigeage aléatoire

Configuration n° 2

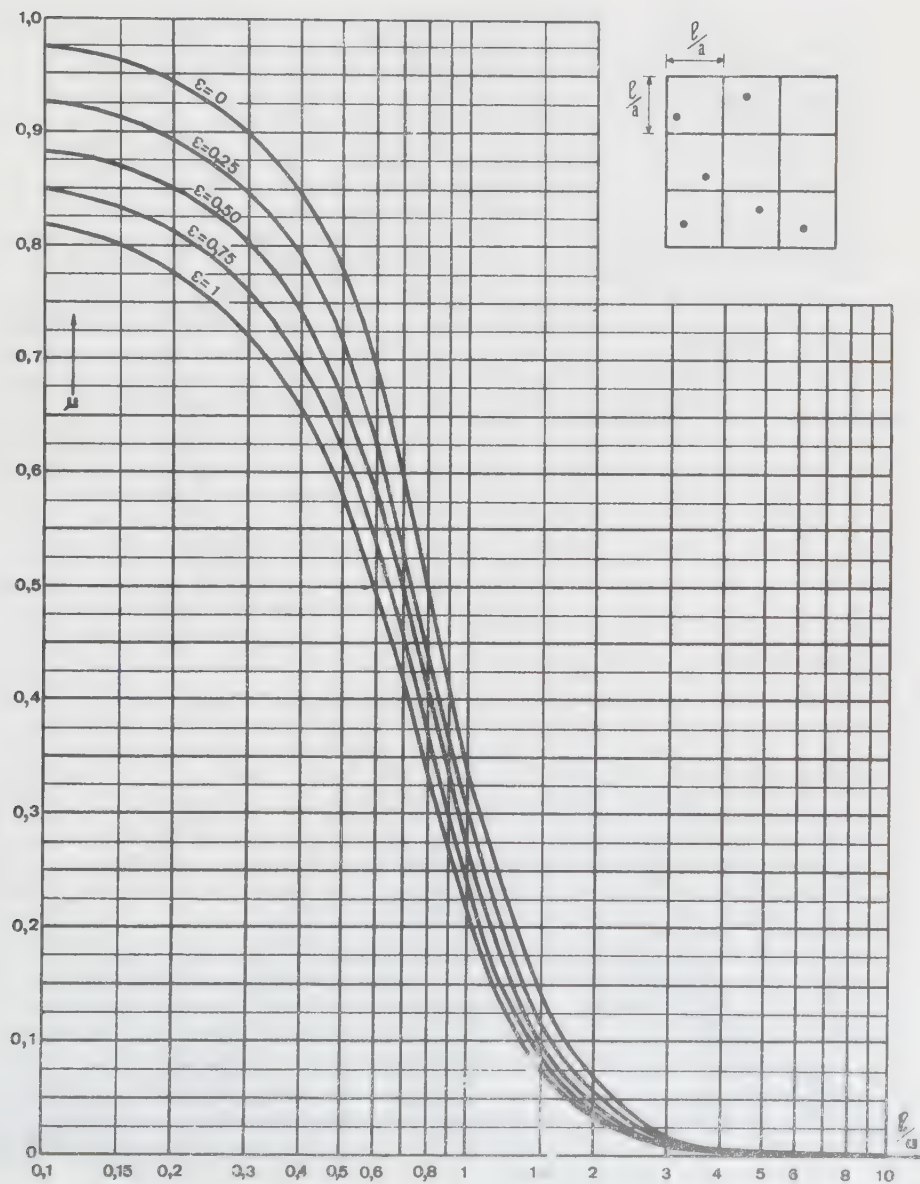


Fig.83-Krigeage aléatoire

Configuration n° 2

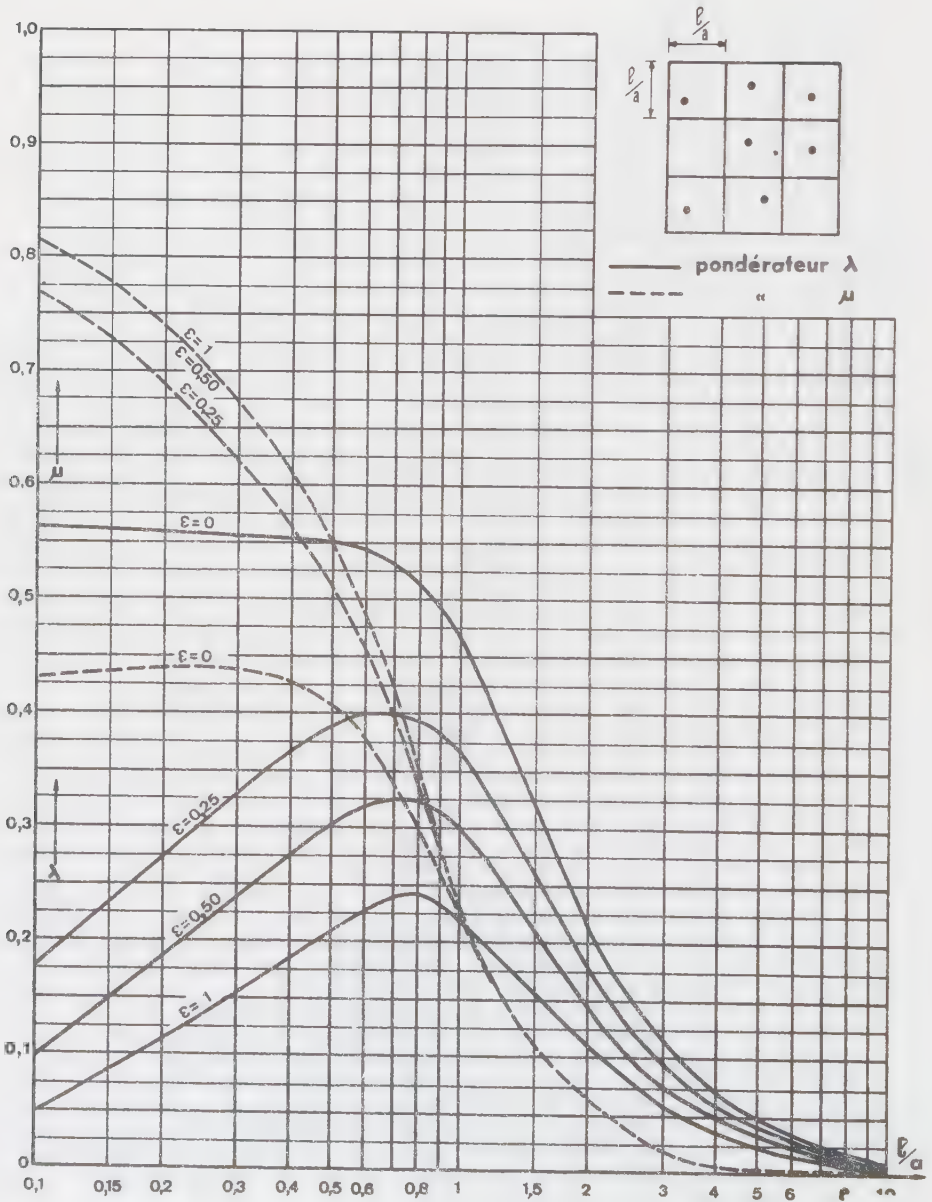


Fig.84-Krigeage aléatoire

Configuration n° 2

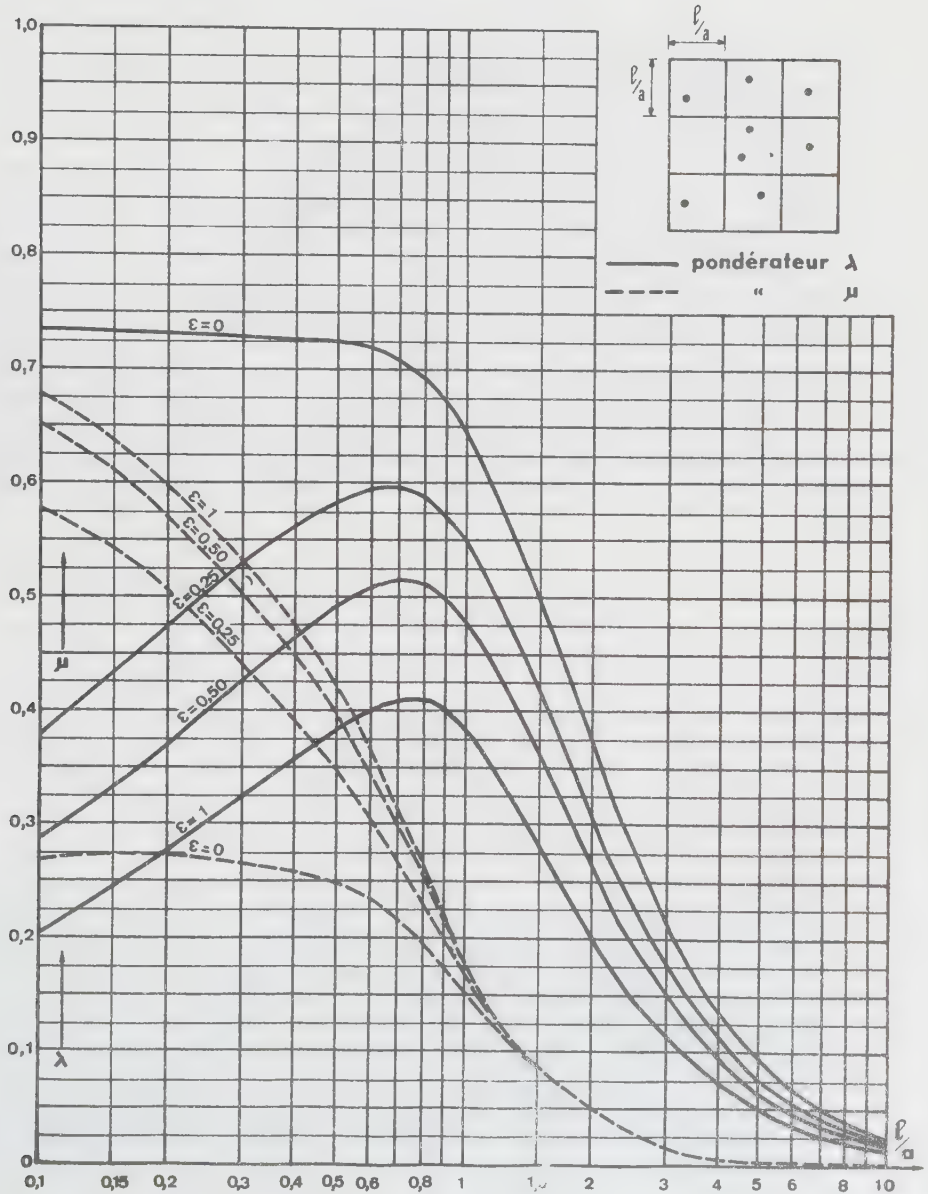
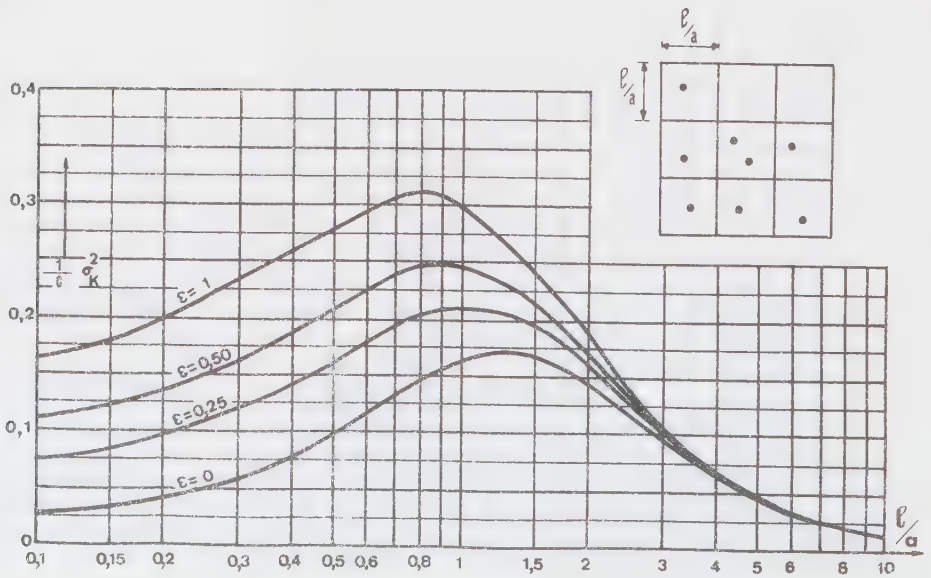
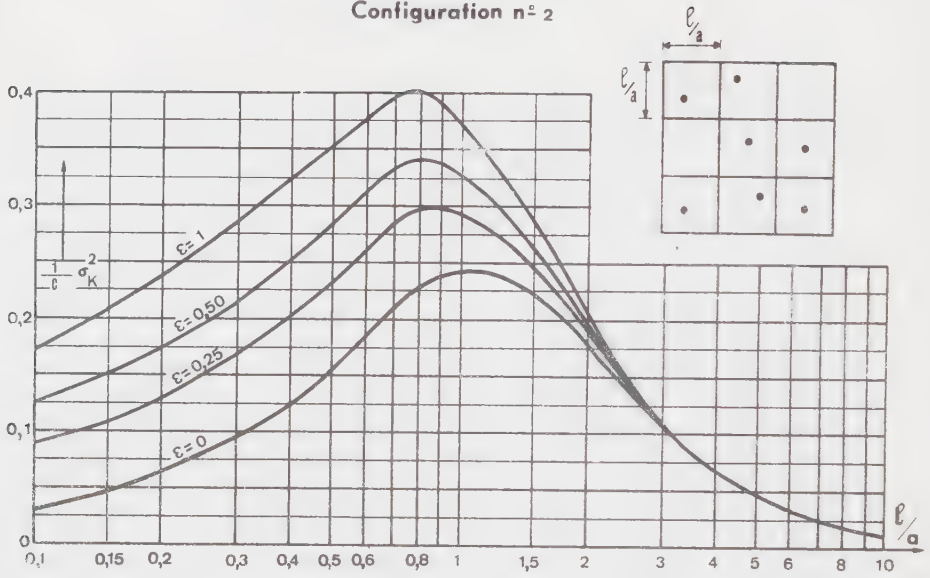


Fig.85-Krigage aléatoire

Configuration n° 2



ETUDES PRATIQUES

CHAPITRE VIII

LE PROBLEME GEOMETRIQUE

- 1 - Plan de calcul de la variance d'estimation d'une surface minéralisée
- 2 - Exercice-type G
Détermination de la variance d'estimation de la surface de la couche grise
(gisement de fer lorrain)
- 3 - Exercice type H
Optimisation d'une maille de reconnaissance.

CHAPITRE VIII

LE PROBLEME GEOMETRIQUE

1. PLAN DE CALCUL DE LA VARIANCE D'ESTIMATION D'UNE SURFACE MINERALISEE

Pour calculer la variance d'estimation d'une surface minéralisée, on procède en trois étapes.

1.1. Détermination des variations diamétrales

A partir de la surface minéralisée probable, planifiée par le bureau des géomètres, on calcule ses variations diamétrales, dans trois ou quatre directions, correspondant aux allongements les plus forts et les plus faibles du gisement.

La figure (VIII - 2), ci-contre, montre ce qu'est une variation diamétrale. Dans la direction Δ , cette variation vaut :

$$2 P (\Delta) = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5$$

Dans la direction Δ' , elle vaut

$$2 P (\Delta') = h'_1 + h'_2$$

(la partie centrale, de taille h'_1 et h'_2 , est un trou non minéralisé).

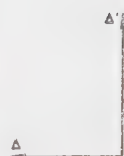
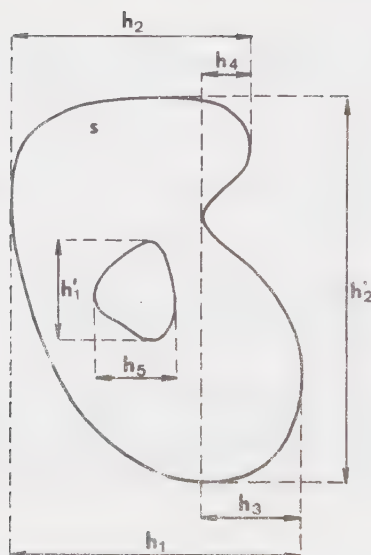


Figure VIII-2

Interprétation physique des tangentes
à l'origine du covariogramme
géométrique $K(h)$.



On déterminera sur le plan les deux directions diamétrales maximale et minimale, de valeur D_1 et D_2 et de directions Δ_1 et Δ_2 .

1.2. Correction de la maille de reconnaissance

La maille de reconnaissance est un rectangle ou un parallélogramme de côté b_1 et b_2 . On transforme cette maille dans l'affinité d'axe D_1 et de module D_2/D_1 , où D_1 est la direction de la petite variation diamétrale et D_2/D_1 le rapport de la plus grande à la plus petite variation diamétrale.

Après cette transformation, la maille est devenue un parallélogramme de côtés β et β' et d'angle aigu θ .

1.3. Calcul de la variance d'estimation

La variance d'estimation se détermine maintenant par simple lecture des abaques (VIII, 4) et (VIII, 5). Elle vaut :

$$\sigma_s^2 = k_1 \cdot k_2$$

On fera attention dans la lecture de k_1 on fait intervenir la maille transformée et qu'il y a 2 courbes différentes selon que l'implantation du réseau est régulière ou aléatoire stratifiée.

Par contre, en ce qui concerne k_2 , c'est la surface A de la maille avant sa transformation qui entre en jeu ; d'autre part, les courbes sont identiques quel que soit le type de maille, régulière, ou aléatoire stratifiée.

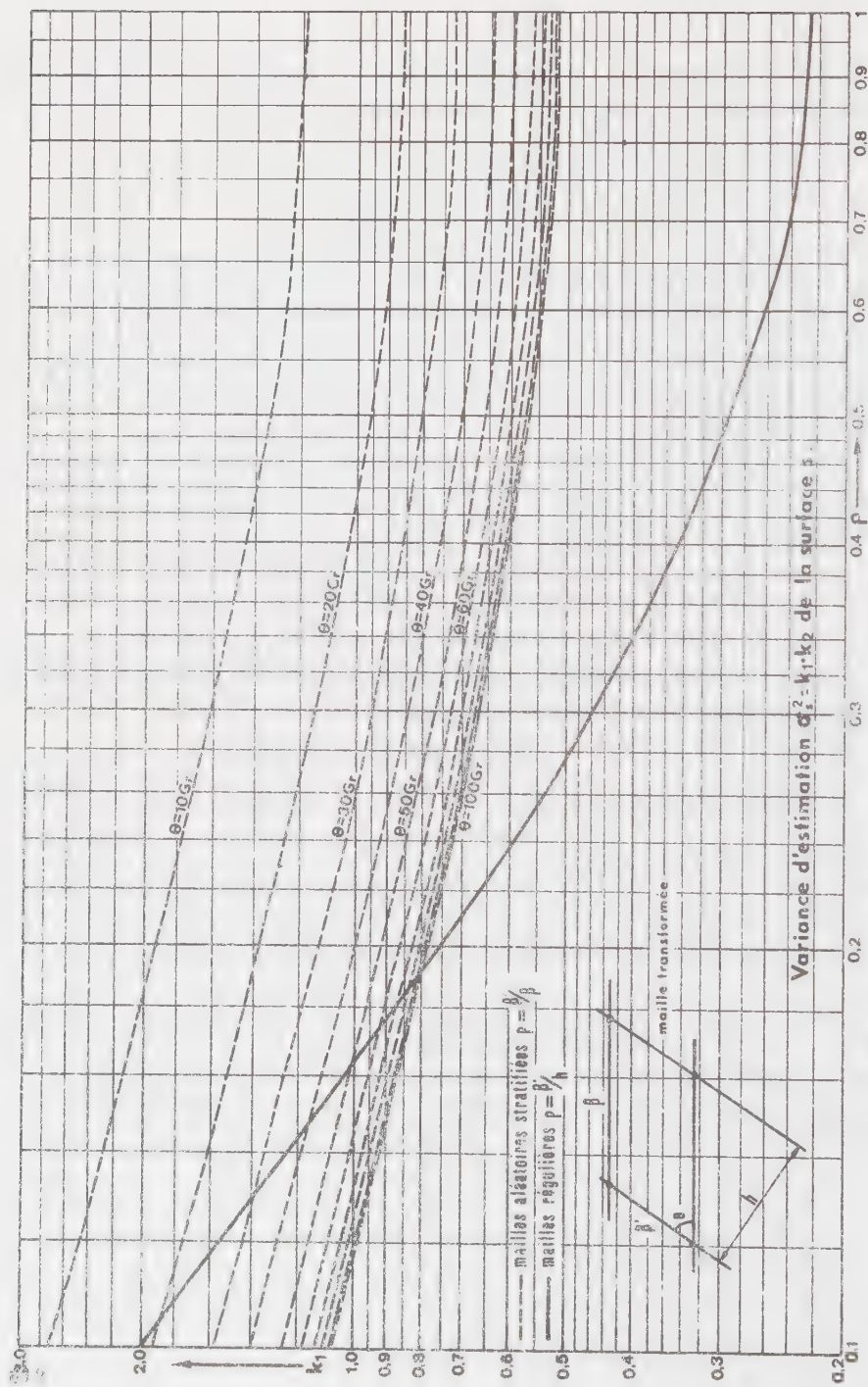
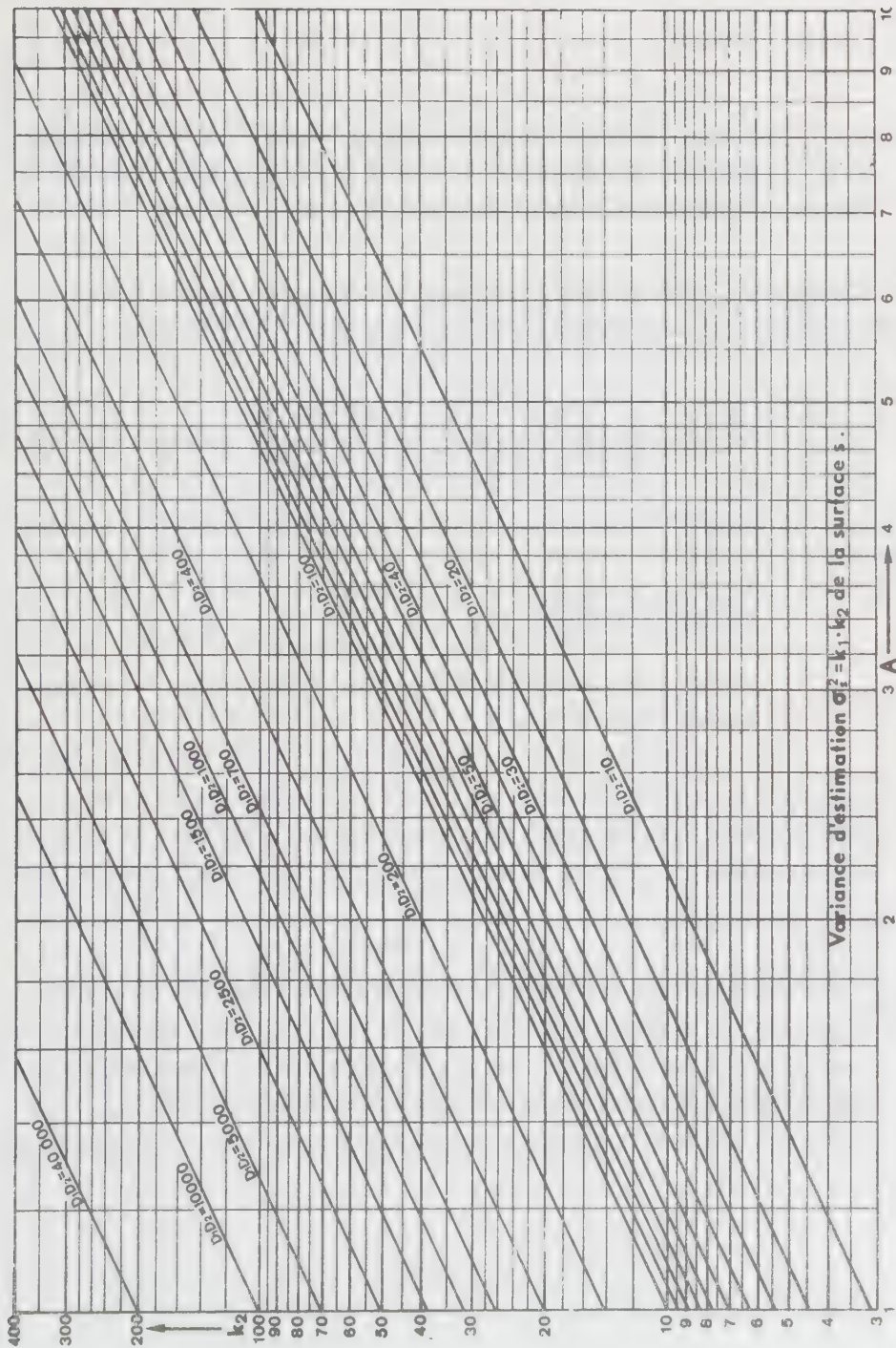


Fig. VIII-4: Expression de k_1 en fonction du rapport ρ et de l'angle θ du parallélogramme transformé



Variane d'estimation $\sigma^2 = k_1 \cdot k_2$ de la surface s.

Fig. VIII-5. Expression de k_2 en fonction de la maille A (régulière ou aléatoire stratifiée) et du produit $D_1 D_2$ des variations diamétrales extrêmes D_1 et D_2 de s.

En ce qui concerne les dimensions, on prendra garde d'exprimer A et $D_1 D_2$ dans les mêmes unités (ex. km^2), la variance qui a la dimension du carré d'une surface sera alors exprimée en km^4 .

Remarque 1 : Si le gisement est reconnu par galeries parallèles et non pas par prélèvements ponctuels, on est prié de se référer au texte du chapitre VIII.

Remarque 2 : Les formules précédentes, approchées, sont d'autant plus valables que la maille est petite par rapport au gisement. Comme critère de validité, on pourra, si on le désire, tracer le covariogramme expérimental. Il faut qu'il soit sensiblement linéaire jusqu'aux distances égales à celles de la maille.

2. EXERCICE-TYPE G

Détermination de la variance d'estimation de la surface de la couche grise (gisement de fer lorrain) (étude effectuée en collaboration avec A. HAAS).

Cet exercice a un double but. D'une part, il applique simplement les formules précédentes, de façon à montrer comment on les manipule et d'autre part, l'exemple choisi étant assez délicat, il permet d'ouvrir une discussion sur les différents types de reconnaissance (affleurements, mailles diverses ...)

La couche grise du Bassin de Briey est la couche la plus étendue et aussi la mieux reconnue : nous avons pu retenir $N = 1111$ sondages pour l'estimation de son extension. Nous avons distingué deux zones : une zone centrale à faciès entrecroisé et une zone périphérique à faciès contourné (cf. figure VIII - 10). La première est géographiquement et économiquement

la plus importante et fait l'objet d'une première estimation (estimation de l'extension de la "couche entrecroisée"). Nous avons regroupé les deux faciès pour une deuxième estimation (estimation de l'extension de la "couche totale").

Les sondages n'ont pas été malheureusement disposés suivant une maille régulière, ni même aléatoire stratifiée : on peut rencontrer tous les degrés de reconnaissance, suivant que l'on se place dans une zone dépilée, tracée ou simplement reconnue par quelques sondages isolés.

Mais il y a plus grave : certaines zones de bordure n'ont fait l'objet d'aucune reconnaissance parce qu'elles n'intéressent pas actuellement les exploitants ; c'est le cas en particulier d'une grande partie du contour de la couche "totale" (regroupant les faciès entrecroisé et contourné).

Enfin, la couche grise est partiellement délimitée par un affleurement dont le dessin est parfaitement connu.

Le contour de la surface estimée S (de la couche entrecroisée ou de la couche totale) est donc composé de trois parties :

- 1°) l'affleurement (partie A)
- 2°) une limite arbitraire dans la couche remplaçant la limite vraie, mais inconnue des zones de bordure, pour lesquelles on n'a pas de sondages extérieurs ou négatifs (partie B).
- 3°) la limite vraie de la couche, lorsqu'on dispose à la fois de sondages intérieurs ou positifs et de sondages extérieurs ou négatifs (partie C).

Estimation de l'extension de la couche grise du gisement lorrain



Chacune de ces trois parties apporte une contribution à la variance d'estimation σ_S^2 de la surface S :

$$\sigma_S^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_C^2$$

σ_A^2 , variance d'estimation relative à l'affleurement, est nulle : $\sigma_A^2 = 0$.
Il en est de même de σ_B^2 , variance d'estimation relative aux limites qui ont été choisies arbitrairement, mais dans la couche : $\sigma_B^2 = 0$.

Enfin, nous avons calculé σ_C^2 à l'aide des formules de Matheron - Formery pour un contour ouvert :

a) Soient D_1 et D_2 les variations diamétrales du contour ouvert C dans les directions principales du gisement :

direction (1) : SW - NE

direction (2) : SE - NW

D_1 et D_2 ont été déterminés graphiquement.

b) Nous avons superposé aux sondages un réseau rectangulaire de directions parallèles aux directions (1) et (2), de façon à ce qu'il y ait au moins un sondage dans chaque maille (située au voisinage du contour ouvert C).

Dans ces conditions, la plus petite maille que l'on puisse prendre est un carré de 1,5 km de côté (cf. figure VIII - 10). Pratiquement nous avons utilisé $n_2 = 353$ mailles, chacune d'elles comprenant un ou plusieurs sondages.

c) En premier lieu, on peut supposer qu'un seul sondage a été implanté "au hasard" dans chaque maille, c'est-à-dire selon une loi de probabilité uniforme.

Chaque maille est donc du type aléatoire stratifié et la variance d'estimation correspondante est égale à $k_1 \cdot k_2$, où :

$$k_1 = f(\rho, \theta) \text{ est donné par l'abaque (VIII - 4) :}$$

ρ est le rapport des côtés de la maille transformée pour corriger l'anisotropie

$$\rho = \frac{D_2}{D_1}$$

θ est l'angle aigu de la maille transformée ; on a $\theta = 100$ grades par construction.

$k_2 = A^{3/2} \frac{D_1 D_2}{A}$ est donné par l'abaque (VIII - 5). A est la surface de la maille : $A = 2,25 \text{ km}^2$.

d) Dans ces conditions, tous les sondages n'ont pas été utilisés ; il y a : $n_2 = N - n_1 = 1111 - 353 = 758$ sondages supplémentaires. On suppose que ceux-ci ont été implantés au hasard dans tout le gisement, ce qui revient à dire que l'on a implanté dans chaque maille un nombre poissonnien de sondages supplémentaires, de paramètre $\theta = \frac{n_2}{n_1} = 2,15$. Il en résulte une amélioration de la variance d'estimation précédente sous forme d'un coefficient multiplicatif

$$\alpha = \frac{1 - e^{-\theta}}{\theta} = 0,411$$

e) En définitive, il vient la formule :

$$\sigma_S^2 = \sigma_C^2 = \alpha \cdot k_1 \cdot k_2$$

et les résultats numériques suivants :

	couche entrecroisée	couche totale
D_1 (km)	81	27
D_2 (km)	46	15
$\rho = \frac{D_2}{D_1}$	0,57	0,56
θ (grades)	100	100
k_1	0,55	0,55
A (km ²)	2,25	2,25
$D_1 D_2$ (km ²)	3726	405
k_2 (km ⁴)	206	68
α	0,411	0,411
$\sigma_S^2 = \alpha \cdot k_1 k_2$ (km ⁴)	47	15
fourchette conventionnelle $\pm 2 \sigma_S$ (km ²)	± 14	± 8

3. EXERCICE TYPE H

Optimisation d'une maille de reconnaissance

Au contraire du précédent l'exercice G n'est pas une application particulière des formules à un exemple concret, mais résoud un problème pratique de portée plus générale. On montre comment le maniement de la variance d'estimation permet de répondre à la question : quel est le meilleur type de maille dans la reconnaissance d'une surface ? La réponse : la maille adaptée, paraîtra peut-être évidente aux chauds partisans du bon sens, encore n'est-il pas mauvais que la théorie la retrouve.

Le résultat obtenu est d'ailleurs général à toutes les régionalisations, intrinsèques ou non, et pas seulement aux surfaces minéralisées.

On dispose de n sondages. On se propose de choisir une maille rectangulaire. Quel est le rapport $\lambda = \frac{b'}{b}$, des deux côtés du rectangle, à adopter ?

Pour obtenir ce rapport λ , il suffit de minimiser la variance géométrique relative c'est-à-dire d'annuler la dérivée du crochet par rapport à λ .

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\sigma_s^2}{s^2} \right) = \frac{1}{n^{3/2}} \sqrt{\frac{D_2^3}{s D_1}} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{D_2 \lambda}{D_1} \right)^{-1/2} - 0,0609 \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{D_2 \lambda}{D_1} \right)^{-5/2} \right]$$

$$\frac{1}{6} - 0,1827 \left(\frac{D_2 \lambda}{D_1} \right)^{-2} = 0$$

$$\frac{D_2 \lambda}{D_1} = \sqrt{6 \times 0,1827} = \sqrt{1,0962}$$

$$\lambda = \frac{b'}{b} = 1,047 \frac{D_1}{D_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$

L'optimum de précision est obtenu, à nombre de sondages fixé, par un rapport de maille égal au rapport des variations diamétrales (le léger écart correspond au caractère approximatif de la formule).

$$\frac{b'}{D_1} = \frac{b}{D_2}$$

On dit alors que la maille est adaptée et la variance géométrique relative est alors :

$$\frac{\sigma_s^2}{s^2} = \frac{0,2276}{n^{3/2}} \sqrt{\frac{D_1 D_2}{s}}$$

Elle représente la variance de l'erreur dans le cas le plus favorable, celui où l'on a tiré le meilleur parti des sondages.

ETUDES PRATIQUES

CHAPITRE IX

L'ESTIMATION PAR SONDAGES ET TRAÇAGES

1 - Reconnaissance à maille régulière

2 - Mailles régulières à une dimension

2.1. Représentations transitives

2.2. Schémas intrinsèques - réseau à implantation flottante

2.3. Schémas intrinsèques - implantations fixes

3 - Mailles aléatoires stratifiées et aléatoires pures

3.1. Représentations transitives

3.2. Schémas intrinsèques

4 - Exercice-type I

Exemple d'estimation par mailles régulières

5 - Exercice-type J

Optimisation de plusieurs modes de reconnaissance simultanés

CHAPITRE IX

L'ESTIMATION PAR SONDAGES ET TRAÇAGES

1. RECONNAISSANCE A MAILLE REGULIERE

Le gisement a une dimension (galerie), deux (couche) ou trois (amas). On décompose le calcul de la variance à n dimensions en n calculs successifs à une dimension. Pour cela, on regroupe les sondages par lignes de plus grande densité et on calcule la variance d'extension dans ces lignes (soit $\sigma_{N_1}^2$), puis la variance d'extension des lignes médianes dans leurs rectangles d'influence (soit $\sigma_{N_2}^2$) puis s'il y a lieu, la variance d'extension des plans dans l'amas (soit $\sigma_{N_3}^2$). Au total, on a :

$$\sigma_N^2 = \sigma_{N_1}^2 + \sigma_{N_2}^2 + \sigma_{N_3}^2$$

2. MAILLES REGULIERES A UNE DIMENSION

2.1. Représentations transitives

Le covariogramme est : $g(h) = \sum_{\lambda} C_{\lambda} h^{\lambda}$
et la maille est : a.

La variance d'extension de la quantité de métal est :

$$\sigma^2(a) = \sum_{\lambda} C_{\lambda} T(a)$$

Cet opérateur est appelé $\gamma_a(g)$.

au terme	h	correspond	$T(a) = \frac{-a}{6}$
"	"	"	$T(a^2) = 0$
"	"	"	$T(a^3) = \frac{a^4}{60}$
"	"	"	$T(a^4) = 0$
"	"	"	$T(a^5) = \frac{-a^6}{126}$
"	"	"	$T(a^6) = 0$
"	"	"	$T(a^2 \log a) = \frac{\pi'}{3} \cdot 0,058 a^3$
"	"	"	$T(a^4 \log a) = \frac{-\pi'}{5} \cdot 0,025 a^5$

Cas particulier : si le covariogramme est linéaire, on utilisera les abaques d'estimation de surfaces (ch. VIII).

2.2. Schémas intrinsèques - réseau à implantation flottante

La bordure exacte de la minéralisation n'est pas connue. Les sondages comme en transitif débordent le champ minéralisé de toute part.

La teneur moyenne est m.

La variance des sondages dans le champ est σ^2 .

Le covariogramme géométrique du champ est K(h).

Le variogramme des teneurs est $\gamma(h)$.

La variance d'estimation du volume minéralisé est :

$$\sigma_v^2 = \xi_a(K)$$

La variance d'estimation de la quantité de métal est :

$$\sigma_Q^2 = (m^2 + \sigma^2) \cdot \sigma_v^2 - \xi_a(K \cdot \gamma)$$

La variance d'estimation de la teneur est :

$$\frac{\sigma_m^2}{m^2} = \frac{\sigma^2}{m^2} \cdot \frac{\sigma_v^2}{v^2} - \xi_a\left(\frac{K \cdot \gamma}{Q^2}\right)$$

Il suffit donc d'appliquer à chaque fois l'opérateur ξ des représentations transitives.

2.3. Schémas intrinsèques - implantations fixes

1ère méthode : schémas de Formery et schéma gaussien

Il y a N sondages, disposés au centre des zones d'influence et le demi-variogramme est :

$$(IX, 13) \quad \gamma(h) = \sum_{\lambda} C_{\lambda} h^{\lambda}$$

La variance d'extension est alors :

$$\sigma_a^2 = \sum_{\lambda} C_{\lambda} T'(a^{\lambda})$$

avec la règle de correspondante suivante :

terme en h	$T'(a) = \frac{1}{N} \frac{a}{6}$
" h^2	$T'(a^2) = \frac{1}{N^2} \frac{a^2}{144}$
" h^3	$T'(a^3) = -\frac{1}{N} \frac{a^3}{160}$
" h^4	$T'(a^4) = -\frac{1}{N^2} \cdot \frac{7}{1440} a^4$
" h^5	$T'(a^5) = \frac{1}{N} \frac{a^5}{126}$
" $h^2 \log h$	$T'(a^2 \log h) = -\frac{1}{N} \cdot \frac{\gamma}{3} \cdot 0,058 a^2$
" $h^4 \log h$	$T'(a^4 \log h) = \frac{1}{N} \cdot \frac{\gamma}{5} \cdot 0,025 a^4$

2ème méthode : schéma de Matheron - schéma linéaire

On calcule la variance d'extension élémentaire d'un échantillon au centre de sa zone d'influence (formules et abaques du chapitre IV) et on divise par N, le nombre d'échantillons.

Si les zones d'influences n'ont pas toutes la même longueur, on pondère les variance d'extension élémentaires par les carrés des longueurs correspondantes.

Remarque : Si le dispositif est fermé (échantillons aux extrémités des zones d'influences) et contient N + 1 échantillons de maille a, sa variance d'estimation est la même que celle du dispositif centré de N échantillons et de maille a.

3. MAILLES ALEATOIRES STRATIFIEES ET ALEATOIRES PURES

On raisonne directement dans l'espace à n dimensions.

3.1. Représentations transitives (mailles aléatoires stratifiées)

Si l'on assimile $g(h)$ à une fonction linéaire, on peut utiliser les abaques d'estimation de surface (ch. VIII). Sinon, on appliquera la formule générale :

$$(IX, 21) \quad \sigma^2(a) = |a| \left[g(o) - \frac{1}{2} \int_a g(h) \tilde{w}(h) dh \right]$$

où $\tilde{w}(h)$ est le covariogramme géométrique du parallélépipède de base de la maille.

3.2. Schémas intrinsèques

Maille aléatoire pure :

$$(IX, 22) \quad \sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sigma^2(o/V)$$

La variance d'un prélèvement dans le champ est divisée par le nombre N des échantillons.

Maille aléatoire stratifiée - champ connu à priori

$$(IX, 23) \quad \sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sigma^2(o/v)$$

La variance d'un prélèvement dans sa zone d'influence est divisée par le nombre N des échantillons.

Maille aléatoire stratifiée - champ non connu à prior

On est ramené à un problème d'estimation transitive.

4. EXERCICE-TYPE I

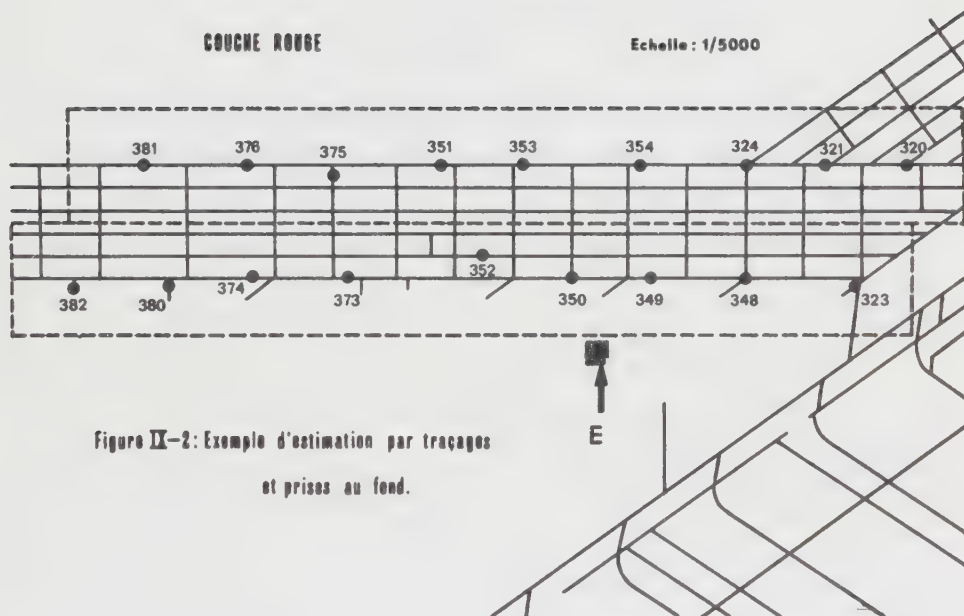
Exemple d'estimation par mailles régulières

Cet exercice a pour but de montrer comment on applique concrètement les calculs de variance d'extension.

Illustrons l'étude des mailles régulières par un exemple réel, emprunté à une exploitation en couche rouge (bassin de Briey). Le plan de répartition des mesures est fourni par la figure 2, les teneurs en fer correspondantes sont

<u>N°</u>	<u>Teneur</u>	<u>N°</u>	<u>Teneur</u>
381	33,0	382	31,1
376	30,6	380	34,5
375	30,7	374	34,5
351	31,7	373	31,3
353	32,3	352	28,9
354	32,8	350	33,2
324	30,9	349	33,5
321	29,8	348	33,2
320	28,7	323	30,8

La teneur moyenne de l'échantillon est $m = 31,75 \%$.



Chaque prélèvement est au milieu d'un segment de 89 mètres, de direction nord-sud. Les lignes de prises sont les médianes de rectangles de 100 . 800 m, et il y a 9 prélèvements par ligne.

Les caractéristiques du variogramme sont les suivantes (raccordement à un schéma de Matheron) :

$$C_0 = 1,0 \text{ pts}^2$$

$$C = 6,8 \text{ pts}^2$$

$$a_M = 550 \text{ mètres (direction nord-sud)}$$

$$a_m = 325 \text{ mètres (direction est-ouest)}$$

Etant donné cette anisotropie, on doit remplacer le champ de 200 mètres (direction est-ouest) . 800 m (direction nord-sud) par un rectangle de même orientation de dimensions 360 m (E.O) . 800 m (N.S) plongé dans une régionalisation isotrope de portée 550 mètres, C et C_0 gardant leurs valeurs numériques.

La maille étant inférieure à la portée, il convient d'adopter le principe de correspondance terme à terme. Appliquons la formule (IX, 14) au $\gamma(h)$ du schéma de Matheron :

$$\gamma(h) = C_0 + C \left[\frac{3}{2} \frac{h}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right]$$

il vient :

$$\sigma_{E_1}^2 = \frac{1}{9} \left\{ C_0 + C \left[\frac{1}{4} \left(\frac{h}{a} \right) + \frac{1}{120} \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right] \right\}$$

où $\sigma_{E_1}^2$ est la variance d'extension des 9 prélèvements d'une ligne à la ligne elle-même.

Si on avait supposé l'indépendance des variances d'extension élémentaires de chaque prise dans son segment d'influence, on aurait trouvé pour variance d'extension équivalent à $\sigma_{E_1}^2$:

$$\sigma_{E_1}^{2'} = \frac{1}{9} \left\{ Co + C \left[\frac{1}{4} \left(\frac{h}{a} \right) + \frac{3}{160} \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right] \right\}$$

Les deux variances ne diffèrent qu'au terme du troisième ordre près : la seconde, qui néglige une covariance, est, comme il se doit, plus élevée que la première, mais de fort peu :

numériquement $\sigma_{E_1}^2$ et $\sigma_{E_1}^{2'}$ ont pour valeur :

$$\sigma_{E_1}^2 = \frac{1,0 + 0,278}{9} = 0,142 \quad \sigma_{E_1}^{2'} = \frac{1,0 + 0,282}{9} = 0,1425$$

A un millième près, on les prendra égales toutes deux à 0,142 points. On constate que la part la plus importante de cette variance est due à la constante de pépité Co.

Calculons maintenant la variance d'extension $\sigma_{E_2}^2$ des galeries elles-mêmes aux rectangles qui les entourent : par application du principe de composition $\sigma_{E_2}^2$ est la moitié de la variance d'extension d'une galerie médiane de longueur 800 mètres dans le rectangle $\ell \cdot h$ où $h = 170$ m. La composante due à l'effet de pépité, qui était liée dans $\sigma_{E_1}^2$ au terme en F(o) disparaît maintenant (cf. chapitre VI) ; il reste les termes du schéma de Matheron proprement dit, on lit sur l'abaque "variance d'extension d'un segment de longueur h dans un rectangle $\ell \cdot h$ " du chapitre IV que :

$$2 \cdot \frac{1}{C} \sigma_{E_2}^2 = 0,0045 \text{ points}^2$$

d'où $\sigma_{E_2}^2 = 0,0153 \text{ points}^2$

la variance d'estimation du panneau σ_E^2 est la somme de $\sigma_{E_1}^2 + \sigma_{E_2}^2$
c'est à dire :

$$\sigma_E^2 = \sigma_{E_1}^2 + \sigma_{E_2}^2 = 0,159 \text{ points}^2$$

Prenons les fourchettes classiques de $\pm 2\sqrt{\sigma_E^2}$; la moyenne m du
panneau est reconnue à $\pm 0,8$ point près :

$$30,95 < m = 31,75 < 32,45$$

5. EXERCICE-TYPE J

Optimisation de plusieurs modes de reconnaissance simultanés

Cet exercice n'est pas, comme le précédent, une simple application
numérique. Il a pour but de montrer comment la notion de variance d'esti-
mation permet de résoudre un problème économique : celui de l'optimisation
d'une campagne de reconnaissance.

Supposons que le mode de reconnaissance soit complexe et demande,
par exemple, le creusement de galeries pour qu'on y implante des sondages,
à partir du fond, ou des saignées. Le problème de l'optimum de reconnaissance
se pose dans les termes suivants : étant donné un budget déterminé pour la

reconnaissance du gisement et connaissant les prix respectifs des saignées et des traçages, quelle est la meilleure campagne possible ? Doit-on tracer une seule galerie bourrée de prélèvements, ou au contraire un très grand nombre de traçages possédant chacun une seule saignée ? Ou plutôt adopter une solution intermédiaire ?

Soit L . H le gisement, supposé rectangulaire, à reconnaître (figure 3), ℓ la distance séparant deux prélèvements consécutifs et h la distance entre deux traçages longs de L . Appelons $\sigma^2(0, \ell)$ la variance d'extension d'une saignée centrale dans un tronçon de galerie de longueur ℓ et $\sigma_E^2(L, h)$ la variance d'extension de la galerie de longueur L , supposée connue, au rectangle L, h dont elle est médiane. D'après le principe de composition des termes de tranche et de section, la variance σ_E^2 de la reconnaissance totale s'écrit :

$$(IX, 32) \quad \sigma_E^2 = \frac{h}{H} \left[\sigma_E^2(L, h) + \frac{\ell}{L} \sigma_E^2(0, \ell) \right]$$



Figure II-3

D'autre part, le coût de l'ensemble des travaux de reconnaissance s'exprime en fonction du P_s d'une saignée et P_G d'un mètre d'avancement :

$$(IX, 33) \quad P = \frac{H}{h} \cdot L \cdot P_G + \frac{H}{h} \cdot \frac{L}{\ell} \cdot P_s = H L P_G \left[\frac{1}{h} + \frac{\omega}{h \ell} \right]$$

en appelant par ω le rapport $\frac{P_s}{P_G}$.

On sait, d'après le calcul des variations, que la variance d'extension minimale, pour un budget fixé P est telle que la fonction :

$$\lambda P + \sigma_E^2$$

a ses dérivés par rapport à ℓ et h nulles, quel que soit λ . L'annulation de la dérivée de (IX, 34) par rapport à ℓ entraîne :

$$(IX, 35) \quad \frac{h}{L} \frac{\partial}{\partial \ell} \left[\ell \cdot \sigma_E^2(0, \ell) \right] = \lambda \frac{\omega}{h \ell^2}$$

et par rapport à h :

$$(IX, 36) \quad \frac{\sigma_E^2(L, h)}{H} + \frac{\ell}{L} \cdot \frac{1}{H} \sigma_E^2(0, \ell) + \frac{h}{H} \frac{\partial}{\partial h} \sigma_E^2(L, h) = \frac{\lambda}{h^2} \left(1 + \frac{\omega}{\ell} \right)$$

Eliminons le multiplicateur de Lagrange λ entre (IX, 35) et (IX, 36), il vient :

$$(IX, 37) \quad L \frac{\partial [h \cdot \sigma_E^2(L, h)]}{\partial h} = \ell^2 \frac{\partial \sigma_E^2(0, \ell)}{\partial \ell} + \frac{\ell^2}{\omega} \frac{\partial [\ell \sigma_E^2(0, \ell)]}{\partial \ell}$$

Dans (IX, 37), le membre de gauche ne dépend que de h et celui de droite que de ℓ , le problème peut donc être résolu graphiquement. On trace la courbe de variation de h en fonction de ℓ de l'optimum (IX, 37) dans le plan ℓ, h , chaque prix P détermine une hyperbole (IX, 33) dont l'intersection avec (IX, 37) est l'optimum recherché.

Ce schéma de calcul est indépendant du choix de la fonction intrinsèque adoptée. Particularisons le d'abord, pour l'étude des petites mailles, en nous donnant un $\gamma(h)$ linéaire (on vérifie sans peine que si le terme de variance d'extension des saignées dans les lignes, dans (IX, 32) avait été établi à l'aide du principe de correspondance, les calculs se reconduiraient de la même façon et qu'en schéma linéaire, ils aboutissent au même résultat).

La variance d'extension $\sigma_E^2(0, \ell)$ s'écrit alors :

$$(IX, 38) \quad \sigma_E^2(0, \ell) = \frac{C}{a} \cdot \frac{\ell}{6}$$

et la variance $\sigma_E^2(L, h)$ calculée à partir d'un développement limité sur les fonctions X et F correspondant au $\gamma(h)$ montée d'ordre 1 du schéma de Matheron (h petit) a pour premier terme :

$$(IX, 39) \quad \sigma_E^2(L, h) = C \cdot \frac{\ell}{a} \cdot \frac{h^2}{L} \cdot \frac{\log 2 - 0,25}{6}$$

Compte tenu de (IX, 38) et (IX, 39), (IX, 37) s'écrit :

$$(IX, 40) \quad 0,222 h^2 = 0,167 \ell^2 + 0,333 \frac{\ell^3}{\omega}$$

La formule (IX, 40) suppose, répétons-le, que ℓ et h sont plus petits que la portée. Si on prend à titre d'illustration $\omega = 1$ et $\ell = 50$ m, il vient : $h = 425$ mètres. Mais en général, le rapport des prix ω est plus faible et ℓ plus grand, les valeurs de h excèdent alors la portée ; on peut conserver l'expression (IX, 38), car ℓ restera relativement petit ; par contre, $\sigma_E^2(L, h)$ (IX, 39) n'est plus valable et l'on doit le remplacer par son équivalent pour les grandes mailles. On a cette fois ($h > 2 a$) :

$$(IX, 41) \quad \sigma_E^2(L, h) = \frac{3}{4} \frac{a}{L} - \frac{1}{5} \frac{a^2}{L^2} - \frac{1}{6} \frac{a^3}{L h^2} + \frac{3}{70} \frac{a^4}{L^2 h^2}$$

(IX, 37) devient alors :

$$(IX, 42) \quad h^2 = \frac{\frac{1}{6} a^3 - \frac{3}{70} \frac{a^4}{L}}{-\frac{3}{4} a + \frac{1}{5} \frac{a^2}{L} + \left[\frac{1}{3 a} \left(\frac{1}{2} + \frac{\ell}{\omega} \right) \right] \ell^2}$$

On voit que h est une fonction décroissante de ℓ (contrairement au cas précédent). Fixons $\omega = \frac{1}{5}$ et $a = 500$ m

pour $\ell = 55$	$h = 1000$ m
$\ell = 50$	$h = 2900$ m

pour h plus grand, ℓ est pratiquement indépendant de h et vaut 48,3 m.

Entre le domaine de validité de (IX, 40) qui suppose ℓ et h inférieurs à la portée a et celui (IX, 42) où l'on doit avoir $\ell < a < h$, d'autres formules peuvent être calculées, à partir des expressions analytiques des $\sigma_E^2(0, \ell)$

$\sigma_{E}^2(\ell, h)$ des cas de figures correspondants : ces expressions étant compliquées, on se contentera en pratique d'exprimer ℓ en fonction de h dans les deux cas extrêmes ci-dessus, pour des valeurs des paramètres a, ω, P_G et P_s fixées : on complètera la fonction $\ell = f(h)$ de l'optimum par interpolation de la partie centrale (qui, on l'a vu, passe par un maximum) et on construira graphiquement son intersection avec l'hyperbole (IX, 33) définie pour chaque dépense totale P .

Un second problème peut se greffer sur le précédent sans difficultés supplémentaires. Si, en effet, l'on cherche à comparer le mode de reconnaissance par traçages et rainurages à partir du fond, avec une campagne de sondages à implanter dans le même champ, on se placera à l'optimum des deux types d'estimation, pour un prix P commun donné.

En ce qui concerne les sondages, leur nombre total N étant à la fois proportionnel au prix et à la variance d'extension $\sigma_{E_1}^2$ correspondante (quel que soit le principe de composition adopté), le calcul de cette variance $\sigma_{E_1}^2$ est immédiat (pour se placer à l'optimum, on choisira toujours une maille régulière adaptée). L'étude du projet de reconnaissance par traçages et rainurages sera poursuivie comme dans l'exemple précédent, et l'on reportera les valeurs ℓ et h trouvées dans l'équation (IX, 32) de la variance $\sigma_{E_2}^2$ du plan d'estimation. Il suffira alors de comparer $\sigma_{E_1}^2$ à $\sigma_{E_2}^2$ et de rejeter le mode opératoire de variance d'extension la plus grande.

ETUDES PRATIQUES

CHAPITRE X

APPLICATION DE LA GEOSTATISTIQUE A L'ECONOMIE MINIERE

1 - Exercice-type K

Etude de la poursuite ou de l'arrêt d'une campagne de recherches

2 - Exercice-type L

Etude de l'optimum d'une reconnaissance par rapport à l'exploitation correspondante.

CHAPITRE X

APPLICATIONS DE LA GEOSTATISTIQUE A L'ECONOMIE MINIERE

(Exercices empruntés à des études de Ph. FORMERY)

1. EXERCICE-TYPE K

Etude de la poursuite ou de l'arrêt d'une campagne de recherches

1.1. Formulaire

Après une première campagne de reconnaissances, trois décisions sont possibles :

- 1 - abandonner le gisement
- 2 - exploiter immédiatement
- 3 - décider de faire une 2ème tranche de travaux de reconnaissance.

La solution la meilleure est celle qui maximise la valeur probable du bénéfice futur. Lorsque la teneur intervient seule dans le risque de ruine, et non pas le tonnage, supposé assez copieux, ces bénéfices futurs ont pour valeur probable :

$$E(B_1) = 0$$

X,30)

$$E(B_2) = A T (m - m_0)$$

$$E(B_3) = A T \left[m G(Y_0 - T) - m_0 G(Y_0) \right] - P$$

où m_0 = la teneur limite
 m = la teneur de la première tranche de reconnaissances
 P = le coût de la seconde tranche de reconnaissances
 T = le tonnage du gisement (en tonnes)
 A = la valeur carreau du point métal contenu dans une tonne de minerai
 $\sigma^2 = \sigma_E^2 - \sigma_{E'}^2$, différence des variances d'estimation du gisement
 après et avant la seconde tranche de reconnaissances
 $Y_0 = \frac{1}{\sigma} \log \frac{m_0}{m} + \frac{1}{2} \sigma$
 $G(X)$ = l'intégrale de X à l'infini de la loi normale réduite.

L'expression de $E(B_3)$ suppose une distribution lognormale des teneurs. mais comme les résultats numériques pour une autre loi seraient voisins, on adoptera cette expression dans le cas général.

1.2. Application numérique

Cet exemple emprunté à une étude de cas réel est une simple application numérique.

On considérera comme des données la valeur des variances d'extension et des différents prix. L'exemple est développé pour montrer la présentation matérielle des calculs.

La reconnaissance supplémentaire améliore la variance de :

$$\sigma^2 = \sigma_E^2 - \sigma_{E'}^2 = 0,0224 - 0,0056$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_E = 0,13$$

La valeur Am du métal contenu à la tonne a été estimée à 30 francs. La teneur limite m_o est exactement égale à la teneur moyenne du gisement ($Am_o = 30$ francs). Nous ferons les calculs cependant pour trois valeurs différentes de Am_o : 27, 30 et 33 francs. Le tonnage considéré comme parfaitement connu est de 200 000 tonnes. Par ailleurs, le projet de la reconnaissance supplémentaire est chiffré à $P = 200\ 000$ francs.

On a les résultats suivants :

	$Am_o = 27$ fr.	$Am_o = 30$ fr.	$Am_o = 33$ fr.
$\frac{m_o}{m}$	0,9	1	1,1
$Y_o = \frac{1}{\sigma} \log \frac{m_o}{m} - \frac{\sigma}{2}$	- 0,74551	0,06500	0,79807
$Y_o - \sigma = \frac{1}{\sigma} \log \frac{m_o}{m} - \frac{\sigma}{2}$	- 0,87551	- 0,06500	0,66807
$G(Y_o)$	0,77201	0,47409	3,25205
$G(Y_o - \sigma)$	3,80935	0,52591	0,21242
$\frac{m}{m_o} G(Y_o - \sigma) - G(Y_o)$	0,12727	0,05182	0,01672
$\frac{m}{m_o} - 1$	$\frac{1}{9}$	0,00000	$-\frac{1}{11}$
$T Am_o$	5 400 000	6 000 000	6 600 000
1) On ferme : $E(B_1)$	0	0	0
2) On exploite : $E(B_2) =$ $T Am_o \left(\frac{m}{m_o} - 1 \right)$	600 000	0	- 600 000
3) Seconde tranche de travaux de reconnaissance : $E(B_3) =$ $T Am_o \left[\frac{m}{m_o} G(Y_o - \sigma) - G(Y_o) \right] - P$	687 000 - 200 000 = 487 000	311 000 - 200 000 = 111 000	110 000 - 200 000 = - 90 000

Si la teneur limite correspond à 27 francs, on doit exploiter. Si elle correspond à 33, on doit fermer. Si elle correspond à 30 (cas exactement marginal), il y a un léger intérêt à faire la seconde tranche de travaux. C'est d'ailleurs là une circonstance assez générale : lorsque l'on est exactement marginal, les informations apportées par une campagne supplémentaire présentent le maximum d'intérêt ; cet intérêt s'amortit assez vite dès que l'on s'écarte du cas marginal par excès ou par défaut. Dès que l'on est pratiquement sûr que la teneur réelle est supérieure (ou inférieure) à la teneur limite, on décide d'exploiter (ou de fermer) et des travaux complémentaires ne présentent pas d'intérêt.

2. EXERCICE-TYPE L

Etude d'un optimum de reconnaissance par rapport à l'exploitation correspondante

Nous supposons maintenant que le risque de ruine est exclus. Nous allons déterminer la ventilation des crédits entre la reconnaissance et l'exploitation dans le cas où seul le tonnage T du minerai est variable, la teneur α de coupure étant imposée.

t est la cadence de production

$I(t)$ est la fonction des investissements

$p(t)$ les dépenses d'exploitation et d'enrichissement, rapportées à la tonne

V la valeur du métal contenu dans une tonne.

Le bénéfice prévisionnel est (en supposant le taux d'actualisation nul)

$$(X, 8) \quad B = \left[V - p(t) \right] T - I(t)$$

2.1. Cadence optima d'exploitation

Particularisons :

$$(X, 4) \quad I(t) = C_0 + C_1 t$$

$$(X, 5) \quad p(t) = a_0 + \frac{a_1}{t}$$

A l'optimum économique, la cadence t_0 est celle qui annule la dérivée de B par rapport à t, c'est-à-dire :

$$(X, 18) \quad t_0 = \sqrt{\frac{a_1 T_0}{C_1}}$$

En pratique T_0 n'est pas connu, mais uniquement son estimation T qu'on substituera à T_0 .

2.2. Expression de la perte probable

La perte probable due au mauvais dimensionnement a pour valeur :

$$(X, 20) \quad E(B_0 - B) = \frac{1}{2} \left(\frac{p'^2}{T' p'' - p' T''} \right)^2 (T p'' P + I'') \sigma_T^2$$

les dérivées étant prises par rapport à t pour la valeur optima de t adaptée au tonnage. En particulier, si

$$II(t) = C_0 + C_1 t$$

$$pp(t) = a_0 + \frac{a_1}{t}$$

il vient :

$$(X, 19) \quad E(B_0 - B) = \frac{\sqrt{a_1 C_1 T}}{4} \cdot \frac{\sigma_T^2}{T^2}$$

Si P est le prix de la reconnaissance, la dépense totale effectuée s'écrit donc :

$$D = E(B_0 - B) + P$$

Supposons par exemple que la reconnaissance soit une campagne de n sondages, la valeur optimale de n est celle qui minimise D .

2.3. Application numérique

Une portion de gisement, reconnue par sondages, donne après une campagne de $n = 19$ sondages à maille de 200 mètres :

$$\begin{array}{ll} \text{le tonnage} & T = 14 \cdot 10^6 \text{ tonnes} \\ \text{et la variance} & \frac{\sigma_T^2}{T^2} = \frac{0,072}{n} + \frac{0,4}{n^{3/2}} \end{array}$$

Le terme en $\frac{1}{n^{3/2}}$ provient de l'erreur commise sur la détermination du contour minéralisé, le terme en $\frac{1}{n}$ provient de la fluctuation propre des puissances.

A un nombre n de sondages est attachée une dépense $P = Sn$ (S étant le coût de foration d'un sondage) et une expression de la perte probable : le bilan négatif est D

$$D = E (B_o - B) + Sn$$

$$D = \frac{\sqrt{a_1 C_1 T}}{4} \left(\frac{0,072}{n} + \frac{0,4}{n^{3/2}} \right) + Sn$$

Il y a lieu de rendre D le plus petit possible. Le nombre optimum de sondages - si tant est que l'on puisse faire varier ce nombre de façon continue - est obtenu en annulant la dérivée de D par rapport à n :

$$\frac{0,018}{n^2} + \frac{0,15}{n^{3/2}} = \frac{S}{\sqrt{a_1 C_1 T}}$$

Nous pouvons prendre pour valeurs plausibles :

$$S = 12\,000$$

$$a_1 = 6,000,000$$

$$C_1 = 30$$

La cadence optima d'exploitation devrait être choisie égale à :

$$t = \sqrt{\frac{a_1 T}{C_1}} = \sqrt{2,8} \cdot 10^6 = 1.670\,000 \text{ tonnes par an,}$$

ce qui correspondrait à l'épuisement du gisement en huit ans et demi.

Quant au nombre optimum de sondages, il est défini par l'équation :

$$\frac{0,018}{n^2} + \frac{0,15}{n^{5/2}} = \frac{12\,000}{5\,107} = \underline{\underline{0,00024}}$$

soit :

$$\frac{75}{n^2} + \frac{625}{n^{5/2}} - 1 = 0$$

qui se résoud très rapidement en substituant quelques valeurs de n. On trouve

$$\underline{\underline{n = 15,3}}$$

Du point de vue de la détermination de la cadence d'exploitation annuelle, la campagne de sondages à maille de 200 mètres qui se compose de 19 sondages suffirait donc.

BIBLIOGRAPHIE

I. MATHEMATIQUES - PROBABILITES - STATISTIQUES

- AITCHISON ET BROWN The lognormal distribution
University Cambridge, 1957
- BASTENAIRE J. Etude théorique du mode de génération des
distributions granulométriques
Revue de statistique appliquée (1963, n° 1)
- CRAMER H. Mathematical methods of statistics
Princeton (1966)
- CHAMBON C. Périodicité des convergences le long des voies
influencées par la taille qu'elles desservent
Revue de l'industrie minérale - vol. 48 n° 12
déc. 1966
- DARMOIS G. Théorie et calcul des probabilités
(spécialement le chapitre sur les probabilités
géométriques)
RIBER - Paris (1949)
- EINSENHART A treatise on the differential geometry of curves
and surfaces
Dover Publications - New York, 1960
- FELLER W. An introduction to probability theory and its
applications
J. Wiley and Sons, Tome I, 1957 ; Tome II, 1966

- | | |
|------------------------------------|---|
| FORMERY Ph. | Probabilité pour que simultanément :
(X soit $> A$)
(Y soit $> B$)
dans une loi de Laplace Gauss à deux variables
X et Y.
Revue de statistique appliquée, 1960 - vol. VIII
n° 2 Paris |
| FORTET R.
BLANC LAPIERRE A. | La théorie des fonctions aléatoires
Masson, Paris 1953 |
| GNEDENKO B. V. | Théorie des probabilités
Moscou, 1961 |
| KENDALL M.G. et
MORAN P.A.P. | Geometric probabilities
Ch. Griffin and Co, Londres 1963 |
| KENDALL M.G. et
STUART A. | The advanced theory of statistics
Hafner Publishing Co, v. 2 : New York, 1960 |
| MATHERON G. | Les variables régionalisées et leur estimation
Masson, Paris 1965 |
| MATHERON G. | Théorie des droites de correspondance
Revue de statistique appliquée, mai 1963 |
| MATHERON G. et
FORMERY Ph. | Cours de probabilités
Ecole des Mines de NANCY, 1965 (non publié) |
| MOTHES J. | Techniques modernes du contrôle des fabrications
Dunod, Paris 1962 |
| POPE J. A. et
MARRIOTT F. H. C. | Errors in the estimation of serial correlations :
Nature, v. 172, p. 778 - 1953 |

- RAGAZZINI et
FRANKLIN Synthèse des accroissements linéaires pulsés
soumis à des entrées aléatoires
Mac Grow Hill, 1958
- SCHWARTZ L. Méthodes mathématiques pour les sciences
physiques
Hermann, Paris 1965
- SCHWARTZ L. Théorie des distributions
Hermann, Paris 1966
- SCHWARTZ B. Etude des mouvements des épontes dans les
exploitations minières
Revue de l'industrie minière, vol. 42 n° 5 et 6
mai-juin 1960
- SERRA J. Buts et réalisation de l'analyseur de textures
Revue de l'industrie minière, vol. 49 - 1967
- ULMO J. Eléments de statistique
Cahiers du CESSID.

II. EVALUATION DES GISEMENTS

- ALLAIS M. Evaluation des perspectives économiques de la
recherche minière sur de grands espaces
Bulletin scientifique et économique du bureau de
recherches minières d'Algérie - Hors série -
101 p. - 1957
- BATEMAN A.M. Economic mineral deposits
John Wiley - New York, 1950
- BLONDEL F. La répartition des teneurs dans les gisements
minéraux
Journal de la Société de Statistique - n° 3-4
pp. 70-74 - Paris, mars 1943

- BLONDEL F. Sur la composition des gisements minéraux
Journal de la Société de statistique - n° 1-2-3
Paris, 1951
- BLONDEL F. La notion de réserves minérales. Le point de vue
du mineur et celui de l'économiste
Annales des Mines - n° 4 - pp. 305-311
Paris, 1953
- BLONDEL F. et LASKY S.G. Mineral reserves and minerals resources
Economic Geology - vol. 51 - n° 7 - pp. 686-697
Novembre 1956
- BONNET J. et SARCIA J. Méthode graphique pour le calcul de la puissance
réelle d'une formation recoupée par un sondage
Mines et Métallurgie - n° 6 p. 355 - Paris, 1959
- CARLIER A. Contribution aux méthodes d'estimation des
gisements d'uranium (thèse)
Fontenay-aux-Roses, 1964
- CARLIER A. Aperçu général du problème de l'estimation des
gisements d'uranium
Cours à l'Ecole des Mines de Paris - ronéotypé
1961
- COSTES G. Etude théorique de l'exploitabilité d'un gisement
minier
Mines, n° 1 - Paris, 1957
- DEREC F. Rapports internes du B.R.G.M.
(années 1960 à 1965)
- DUVAL R. Nouvelle explication proposée de la dissymétrie
constatée des distributions des fréquences des
teneurs de gisements
Revue de l'industrie Minérale - vol. 43, n° 6 -
Saint-Etienne, juin 1961

- DUVAL R. A propos de l'échantillonnage des gisements
Annales des Mines - pp. 76-88 - Paris, décembre 1955
- FALINI F. Le problème de l'échantillonnage des gisements minéraux. Enoncé du problème et concepts fondamentaux
Industria Mineraria - 1956 anno 7 - 23 p. Roma (analyse, Chroniques des Mines et Recherches Minières, n° 250, avril 1957)
- FERSMAN A. E. Méthodes géochimiques et minéralogiques de recherches des minerais. Oeuvres choisies
Ed. Acad. Sc. URSS, Moscou 2, 443-747 1955
- FONCK J. M. Contribution à l'étude du réservoir d'Hassi Messaoud
Distribution des hétérogénéités dans le champ d'Hassi Messaoud
(rapports internes de la Compagnie Française des Pétroles)
- FORMERY Ph et ZIEGLER V. Application des méthodes mathématiques à l'étude des gisements d'uranium
(Nations Unies - conférence internationale. L'utilisation de l'Energie Atomique à des fins pacifiques) - Genève, 1958 - P/1246 (France).
- FORMERY Ph. Cours de géostatistique
Ecole des Mines de NANCY (non publié)
- GRENIER J. Quelques aspects de l'échantillonnage des minerais
Bulletin du Génie Minier - Commissariat à l'Energie Atomique, n° 12, pp. 17-30, 1961
- GROSJEAN P. V. L'évaluation mathématique des gisements détritiques
Mémoires de l'Institut Royal Colonial Belge, tome VIII, fasc. 3, Bruxelles 1953

- GY P. Poids à donner à un échantillon - Abaques d'échantillonnage
Revue de l'Industrie Minérale, vol. 38 n° 636
pp. 53-92 - Saint Etienne, février 1956
- GY P. Facteurs ayant une influence dans l'échantillonnage des minerais
Annales des mines - pp. 61-65 - Paris, avril 1960
- GY P. L'échantillonnage des minerais en vrac
Editions de l'Industrie Minérale, 1966
- HAAS A. Rapports internes de l'IRSID , 1965-1966
- HAZEN S.W. et BERKENKOTTER R.D. Experimental mine-sampling project designed for statistical analysis
U.S. Bureau of Mines, Rept. of investigations 6019, 1962
- HEWLETT R. F. Computer methods in evaluation, development and operations of an ore deposit
AIME Annual Meeting, Febr. Dallas, 1963
- JAHS H. Principe de la classification des réserves, projet de normalisation
Glückauf - 92ème année - n° 35/36 - 1er septembre 1956 - pp. 1042-1047 . Document Cerchar A. 20 2754 - Traduction Cerchar 18 - 57.
- JAKZHIN A. A. Echantillonnage et calcul des réserves des minerais solides
Gosgeoltekhizdat - Moscou, 1954
- JONES W. A. Ore reserves : Their classification and definition
Bulletin of the institution of Mining and Metallurgy n° 577, déc. 1954 et "Discussions" n° 579-582-583
fev., mai, juin 1955

- JOSEPH M. E. Statistical methods in sampling
Australasian Institute of Mining and Metallurgy
Proc. n° 202, p. 81-101 - 1962
- KAZH AN A. B. et SOLOVIEV N. N. Méthodes de la détermination de la teneur liminaire
lors du calcul des réserves de minerai - Prospection
et protection du sous-sol
Trad. de Razvedka I okrana nedr par B. R. G. M.
Paris, décembre 1958
- KLEIBER F. et MURARD R. Application de la statistique mathématique à l'étude
des gisements filoniens aurifères d'A. O. F.
Congrès du Centenaire de l'Industrie Minérale, 1955.
Revue de l'industrie minérale n° spécial 1 R,
pp. 483-516, Saint-Etienne - Janvier 1956
- KRIGE D. G. A review of the impact of statistics on mine
valuation in the gold mining industry.
J. S. Afr. Inst. Min. Metall. 64 p. 373 - 1964
- KRIGE D. G. A statistical approach to some mine valuation and
allied problems on the Witwatersrand
M. Sc. Thesis, University of the Witwatersrand,
1951
- KRIGE D. G. The significance of a limited number of borehole
results in the exploration of new South African
gold fields
Symposium on Mathematical Techniques and
Computer Applications in Mining and Exploration,
Tuscan, Arizona - 1962
- KRIGE D. G. On the departure of ore value distributions from
the Log-Normal model in South African gold mines
J. S. Afr. Inst. Min. Metall. 61 - p. 231) - 1960/1
- KRIGE D. G. Economic aspects of stoping through unpayable ore
Ibid, 62 - p. 364 - 1961/2

- KRIGE D.G. Effective pay limits for selective mining
Ibid, p. 435
- KRIGE D.G. et
UECKERMAN H. J. Value contours and improved regression techniques
for ore reserve valuation
J.S. Afr. Inst. Min. Metall, 63 - p. 429
1962/3
- KRIGE D.G. Recent developments in South Africa, in the
application of trend surface and multiple regression
techniques to gold ore valuation
Q. Colorado School of Mines, 59 p. 795 - 1964
- PIROW P.C. et
KRIGE D.G. The use of mathematical statistics and computers
for planning and control of the gold mines of the
Transvaal and Orange Free State
8th Commonwealth Min. Metall. Congress
Australia and New Zealand, 1965
- KRIGE D.G. Developments in the valuation of gold mining
properties from borehole results
Transactions of the 7 th Commonwealth Min.
and Metall. Congress - p. 537 - Johannesburg
1961
- KRIGE D.G. Two-dimensional weighted moving average trend
surfaces for ore valuation
Symposium on Mathematical Statistics and
Computer Applications in Ore Valuation
J. S. Afr. Inst. Min. Metall, 1966
- LAFFITE P. Recherches minières et méthodes statistiques
Ann. Mines, p. 109-112 - Février 1957
- LASKY S.G. How tonnage and grade relations help predict
ore reserves
E.M.J. avr. 1950 - Trad. Blondel
Chron. Mines Coloniales, n° 177 - 15 mars 1951

- LASKY S.G. The concept of ore reserves
M. and Metall, oct. 1945, 26
trad. par Blondel, Chron. Mines coloniales
n° 207, sept.-oct. 1953
- MATHERON G. et
FORMERY Ph. Recherche d'optima dans la reconnaissance et
la mise en exploitation des gisements miniers
Annales des Mines, mai et juin 1963
- MATHERON G. Utilité des méthodes statistiques dans la recherche
minière
Comm. Cong. Cent. Soc. Ind. Min. - juin 1955
Rev. Ind. Min. n° sp. IR, Saint-Etienne, janv. 1956
- MATHERON G. Application des méthodes statistiques à l'évaluation
des gisements
Ann. Mines, déc. 1955
- MATHERON G. Théorie lognormale de l'échantillonnage systé-
matique des gisements
Ann. Mines, sept. 1957
- MATHERON G. Remarques sur la loi de Lasky
Chron. Mines O.M. et de la recher. minière
p. 463-466 - déc. 1959
- MATHERON G. Principles of geostatistics
Economic geol. - déc. 1963
- MATHERON G. Traité de géostatistique appliquée
Ed. Technip - Paris - Tome I : 1962 - Tome II :
1963 - Tome III (non publié)
- MATHERON G. Comparaison entre les échantillonnages à poids
constant et à effectif constant
Revue Industrie Minérale, août 1966
- MATHERON G. Traité de géostatistique (en russe)
Moscou (à paraître)

- PETRASCHEK W. E. Discussion sur les réserves de minerais
Zeitschrift für Erzbergbau und Metallhüttenwesen
Halle et Stuttgart, 1957 - vol. X, n° 3 - 4 p.
- PROKOFJEV A. Méthode pratique de calcul des réserves d'un
gisement de minerai
Moscou, 1954 (en russe)
- ROSS F. W. J. The development and some practical applications
of a statistical value distribution theory for some
Witwatersrand auriferous deposits.
M. Sc. Thesis, University of the Witwatersrand
1950
- ROUTHIER P. Les gisements métallifères
Géologie et principes de recherche
Masson, 1282 p. , Paris, 1963
- ROWLAND R. ST. J. et
SICHEL H. S. Statistical quality control of routine underground
sampling
Ibid, 60 - p. 251 - 1960
- SAMANTA H. P. A rapid physico chemical method for the
evaluation of iron ores
Tisco - Octobre 1964
- SANDIER J. Mise en valeur des gisements métallifères
Masson éditeur - Paris, 1962
- SERRA J. Echantillonnage des minerais lorrains en place
Bulletin technique des mines de Fer - Briey,
nov. 1966
- SICHEL H. S. Mine valuation and maximum likelihood
M. Sc. Thesis, University of the Witwatersrand
1949
- SICHEL H. S. New methods in the statistical evaluation of mine
sampling data
Trans. Inst. Min. Metall. London, 61 p. 267
1951/2.

SMIRNOV W. I.

Fondements géologiques de la recherche et de la reconnaissance des gîtes minéraux (en russe) :

- I. Recherche des gîtes minéraux (275 p.)
- II. Reconnaissance des gîtes minéraux (80 p.)
- III. Echantillonnage et instrumentation géologique (80 p.)
- IV. Calcul des réserves (100 p.)

Université de Moscou - 2e Ed. 1957

STAMMBERGER F.

Zum Problem der Bauwürdigkeit
Zeitsch. f. angew. Geol., fev. - mars 1957

STAMMBERGER F.

Procédé d'estimation des réserves de gisement
de matières minérales
Akademie Verlag - Berlin, 1956

TEIL H.

La certitude de prévision des réserves de gisement
Zeitschrift für Erzbergbau und Metallhüttenwesen
Vol. XII n° 7, pp. 338-344 - Juillet 1959

WATERMEYER G. A.

Application of the theory of probability in the
determination of ore reserves
J. Chem. Metal. Soc. S. Afr. 19, p. 97 - 1919

WIJS (de) H. J.

Les méthodes statistiques appliquées à la prise
d'échantillons dans les gisements de minéraux
utilisables
Angewandte Chemie Deutschlands 1953 - Vol. 65
n° 13

WIJS (de) H. J.

Statistics of ore distribution
J. of the Roy. Netherlands Geol. and Min. Soc., I
nov. 1951 ; 2, janv. 1953.

III. MINERAI DE FER LORRAIN

- AUBRY J. et
TURPIN G. Etude de la répartition du phosphore dans les
minerais de fer de Lorraine
Bull. Soc. chim. France, Paris, 5ème série,
t. 18, p. 889 - 1951
- ASTIER J. Considérations sur le développement des recherches
d'enrichissement des minerais lorrains
ATB Métallurgie, 1961
- BARON J. Sur un essai de laboratoire de séparation des
oolithes des minerais de fer du bassin lorrain.
Bull. tech. Mines de fer de l'Est de la France,
Nancy, n° 13, p. 13, et Chim. anal. Paris n° 31
p. 29 - 1948
- BERNARD A. et
BUBENICEK L. Les séquences sédimentaires de la formation
ferrifère de Lorraine
C.R. Acad. Sci. Paris, t. 250, pp. 3353-3355,
1960
- BICHELONNE J. et
ANGOT P. Le bassin ferrifère lorrain
Berger-Levrault, éd., Nancy-Strasbourg - 1939
- BUBENICEK L. Recherches sur la constitution et la répartition
des minerais de fer dans l'Aalénien de Lorraine.
Sciences de la Terre - tome VIII (1961) p. 5 à 204
NANCY, 1961
- BUBENICEK L. Les paragenèses des minerais lorrains
Revue de l'Industrie Minérale, vol. 45, n° 7
juillet 1963
- BUBENICEK L. Comportement détritique des oolithes de la
minette lorraine
C.R. Acad. Sci. Paris, t. 249, Pp. 1371-1373
1959

- BUBENICEK L. Développement diagénétique des chlorites de la minette lorraine
C.R. Acad. Sci. Paris, t. 251, pp. 765-767
1960
- BUBENICEK L. Géologie du gisement de fer de Lorraine
Editions "Le Lorrain" (à paraître)
- BOUCRAUT M.
TOTH I. Procédé IRSID de grillage magnétisant en fluidisation
ATS Paris, 25 novembre 1965
- CAILLERE S. et
KRAUT F. Sur la genèse des minerais oolithiques de Lorraine en rapport avec l'état du fer et sur l'unité chronologique et spatiale de leur évolution.
C.R. Acad. Sci., Paris, t. 235, n° 9, pp. 510-511
1952
- CAYEUX L. Les minerais de fer oolithiques de France ; minerais de fer secondaires
Fasc. 2 - Imprimerie nationale, Paris - 1922
- DEUDON M. Minéralogie et pétrographie des minerais de Lorraine
3e Ass. gén. Inst. del Hierro y del Acero
Madrid - 1955
- GUINARD P. Matières premières en sidérurgie : les minerais de fer
Les cahiers du CESSID, n° 1, METZ - 1955
- LUCIUS M. Les bases géologiques du minerai de fer oolithique du bassin minier de Luxembourg
Rev. tech. Luxemb. n° 4 - 1954
- MAUBEUGE P. L. Observations géologiques dans l'Est du Bassin de Paris
Thèse, Nancy - 1955

- MICHARD J. Valorisation des minerais lorrains. L'enrichissement par voie physique
Revue de l'Industrie Minérale, vol. 48, n° 7
juillet 1966
- PRECHEUR C. La Lorraine sidérurgique
Sabri édit., 1 vol; 632 p. - 1959
- ROCHAS R.
BOUCRAUT M. Les moyens d'étude de l'IRSID en matière d'agglomération sur grille
Revue de l'Industrie Minérale, avril 1966
- ROUBY M. Une méthode de fractionnement applicable aux minerais de fer oolithiques de Lorraine
Rev. Indus. minér. vol. 41 n° 8 - pp. 662-666
Saint-Etienne - 1959
- TRINCELIN E. Pressions et déformations de terrains dans les mines de fer de Lorraine
Jouve édit., 1 vol. 284 p. - Paris - 1959
- TORCY F. (de) Minerais de fer lorrains les plus aptes à l'enrichissement
Bull. tech. Mines de fer, n° 46, 1er trim.
Nancy - 1957
- TURPIN G. Contribution à l'étude de la répartition des éléments dans les minerais de fer de Lorraine
Centre Doc. sidérurg. - 1952

IV. QUELQUES ETUDES UTILES POUR LA COMPREHENSION GEOLOGIQUE DU GISEMENT DE FER LORRAIN

- ERHART H. La genèse des sols en tant que phénomène géologique
Massin, Paris - 1956
- GARRELS R. M. Minerals equilibria at low pression and temperature
Harpers N. Y - 1960

- LOMBARD A. Géologie sédimentaire
Masson, Paris - 1956
- MATHERON G. Les variables régionalisées et leur estimation
Masson - Paris, 1965
- STRAKHOV N. M. Méthodes d'études des roches sédimentaires
Moscou, 1957 - (trad. BRGM)
- VAN STRAATEN L. M. J. V. Aspects of the holocene sedimentation in the
Netherlands
Verhandlingen KNGMG, vol. 21-1 - 1963
- CHARAPOV I. P. Méthodes mathématiques en géologie
Nedra Moscou 1965
- VISTELIUS A. B. Studies in mathematical geology
Plenum publishing corporation
New-York 1967

TABLE DES MATIERES

	<u>Pages</u>
<u>Première partie : EXEMPLES ET MODELES DE PHENOMENES DE TRANSITION</u>	
Chapitre I Introduction	
1. But de l'étude	... 17
2. Plan du texte	... 19
Chapitre II Résumé de la théorie intrinsèque des variables régionalisées	
1. La notion d'erreur	... 27
2. Critique de la notion usuelle de variance	... 30
3. Les variables régionalisées	... 34
4. L'hypothèse intrinsèque	... 36
5. Variances d'extension	... 40
6. Principe du calcul des variances d'extension - la fonction intrinsèque	... 42
7. Propriétés et signification de la fonction intrinsèque	... 44
8. Calcul des variances et variances d'extension	... 51
9. Formules auxiliaires	... 55
10. Les deux visages de la théorie des variables régionalisées	... 58
11. La matrice de codispersion intrinsèque	... 59
Chapitre III Présentation géologique du gisement de fer lorrain	
1. Introduction	... 65
2. Situation du gisement	... 65
3. Cadre minéralogique et pétrographique	... 66
4. Champs et supports	... 75
5. Description séquentielle du gisement	... 77

	Pages
6. Phénomènes de transition dans les couches minéralisées d'échelle minière ...	82
7. Exemple des régionalisations métriques ...	85
8. Raccordements entre échelles ...	92
9. Structures intrinsèques à grande échelle ...	94
10. Synthèse des phénomènes de transition de supports miniers ...	98
Chapitre IV Les schémas intrinsèques	
1. Caractéristiques formelles des variogrammes expérimentaux ...	107
2. Schémas théoriques ...	109
3. Inventaire des fonctions de base ...	112
4. Fluctuations de la teneur, des variances, et du $\gamma(h)$...	116
 Deuxième partie : PROBLEMES GEOSTATISTIQUES	
Chapitre V L'estimation minière	
1. Trois hiérarchies ...	127
2. Un gisement est une opération technologique ...	130
3. Classification des problèmes géostatistiques usuels ...	138
Chapitre VI L'effet de pépité et l'échantillonnage des régionalisations	
1. L'effet de pépité ...	147
2. Effet de pépité granulométrique ...	154
3. Effet de pépité de la taille du support ...	177
4. Echantillonnage des minerais lorrains en place ...	193
Chapitre VII Le krigeage	
1. Définition et propriétés générales ...	205
2. Krigeage des phénomènes de transition intrinsèques ...	217
3. Krigeage des panneaux réguliers reconnus à maille rectangulaire ...	228

		Pages
	4. Krigeage élémentaire	... 245
	5. Le krigeage aléatoire	... 247
Chapitre VIII (Annexe)	Le problème géométrique	
	1. Formulation du problème géométrique	... 281
	2. Les représentations transitives	... 285
	3. Estimation transitive des surfaces par reconnaissance à mailles petites	... 289
	4. Cas particuliers importants de petites mailles	... 293
	5. Estimation transitive de surfaces par reconnaissance à maille grande	... 295
	6. Problème des mailles moyennes	... 297
	7. Reconnaissance à maille variable	... 298
Chapitre IX (Annexe)	L'estimation par sondages et traçages	
	1. Introduction	... 305
	2. Mailles régulières à une dimension	... 307
	3. Mailles régulières à plusieurs dimensions	... 316
	4. Mailles aléatoires stratifiées et aléatoires pures	... 319
	5. Estimations simultanées du minerai, du métal et de la teneur moyenne (schémas intrinsèques)	... 323
	6. Impuissance de la géostatistique à donner une solution au problème des aval-pendages et des extensions	... 327
Chapitre X (Annexe)	Applications de la géostatistique à l'économie minière	
	1. Géostatistique et économie minière	... 333
	2. Les calculs de réserves	... 337
	3. Etude de l'optimum économique	... 342
	4. Reconnaissance optimale pour le dimensionnement de l'exploitation	... 349
	5. Optimisation séquentielle et arrêt des recherches	... 354

<u>Troisième partie : ETUDES PRATIQUES DE GEOSTATISTIQUE</u>		
(les chapitres doublent ceux des deux premières parties)		
Généralités	1. Introduction	371
	2. Liste des exercices-type	373
	3. Lexique des termes utilisés en géostatistique	375
Chapitre II	1. Formulaire de base de géostatistique	397
	2. Formulaire des diverses variances des segments, rectangles et parallélépipèdes	401
	3. Exercice-type A. Etude de la variance d'extension d'un ou de deux sondages à un tronçon de galerie	408
Chapitre III	Exercice-type B. Construction d'un variogramme expérimental	415
Chapitre IV	1. Notations utilisées dans la tabulation des schémas	431
	2. Le schéma de Matheron	442
	3. Le schéma de Formery	459
	4. Le schéma gaussien	471
	5. Le schéma linéaire	478
	6. Schémas avec effet de trou	489
	7. Exercice-type C. Ajustement d'un variogramme expérimental à un modèle théorique	490
Chapitre VI	1. Règles d'échantillonnage des minerais lorrains en place	497
	2. Variances d'échantillonnage des minerais en place	498
	3. Exercice type D. Exemple d'application des règles d'échantillonnage	502

		Pages
	4. Norme d'échantillonnage des minerais lorrains ...	502
Chapitre VII	1. Règles pratiques d'utilisation du krigeage ...	504
	2. Krigeage à mailles régulières, cas général ...	506
	Exercice-type E. Exemple de lecture des abaques de krigeage régulier ...	508
	et abaques de krigeage par mailles et panneaux ...	511
	3. Krigeage régulier, trois cas particuliers : - étude des petits panneaux isotropes, quand $\sigma = 0$...	561
	- cas particulier unidimensionnel ...	568
	- le krigeage élémentaire (exercice-type F et abaques) ...	572
	4. Le krigeage élémentaire ...	594
Chapitre VIII	1. Plan de calcul de la variance d'estimation d'une surface minéralisée ...	609
	2. Exercice type G. Détermination de la variance d'estimation de la surface de la couche grise (gisement de fer lorrain) ...	614
	3. Exercice-type H. Optimisation d'une maille de reconnaissance ...	620
Chapitre IX	1. Reconnaissance à maille régulière ...	625
	2. Mailles régulières à une dimension ...	625
	3. Mailles aléatoires stratifiées et aléatoires pures ...	629
	4. Exercice-type I. Exemple d'estimation par maille régulière ...	630
	5. Exercice-type J. Optimisation de plusieurs modes de reconnaissance simultanés ...	634
Chapitre X	1. Exercice-type K. Etude de la poursuite ou de l'arrêt d'une campagne de recherches ...	643
	2. Exercice-type L. Etude de l'optimum d'une reconnaissance par rapport à l'exploitation correspondante ...	646

